ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΓΕΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ : «ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ»

ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΥΧΑΙΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ

ΧΑΛΚΙΑΔΑΚΗΣ ΜΙΧΑΗΛ

Επιβλέπων: Επίκουρος Καθηγητής **Δάρας Τρύφων**

ΧΑΝΙΑ , 2013

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Κεφάλαιο 1 Σήματα

Κεφάλαιο 2 Συστήματα σημάτων

Κεφάλαιο 3 Μετασχηματισμός Fourier ενός σήματος

Κεφάλαιο 4 Μετασχηματισμός Laplace ενός σήματος

Κεφάλαιο 5 Τυχαία σήματα

Κεφάλαιο 1 Σήματα

1.1. Σήματα

Στον φυσικό κόσμο, κάθε ποσότητα που παρουσιάζει μεταβλητότητα στον χρόνο ή στον χώρο, μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα σήμα το οποίο ίσως μας παρέχει πληροφορίες για την κατάσταση ενός φυσικού συστήματος ή μεταφέρει κάποιου είδους μήνυμα μεταξύ παρατηρητών. Δηλαδή, σήμα είναι μια συνάρτηση που μας μεταφέρει πληροφορίες για την συμπεριφορά ή τις ιδιότητες κάποιου φαινομένου (φυσικού συστήματος).

Ορισμός 1.1.1 (**μαθηματικός ορισμός σήματος**)
Μια (πραγματική ή μιγαδική) συνάρτηση $f(t)$, μιας μεταβλητής t λέμε ότι αποτελεί ένα **σήμα**. Συνήθως το t παριστάνει τον χρόνο. Ένα σήμα συνήθως παριστάνεται με $x(t)$, $y(t)$ κ.λ.π.

Παράδειγμα 1.1.2
Συνήθως το σήμα $f(t)$ είναι η τάση στα άκρα ενός ηλεκτρικού στοιχείου ή το ρεύμα που διαρρέει ένα ηλεκτρικό στοιχείο.

Παράδειγμα 1.1.3
Οι παρακάτω συναρτήσεις είναι σήματα:

(I) $$x[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

(II) $$x(t) = \sin(5t),$$

(III) $$x(t) = \begin{cases} e^t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

(IV) $$x[n] = \left\{ \dots, 1, 0, \underset{\uparrow}{2}, 1, -1, 3, 0, 1, -4, \dots \right\}$$

όπου με $\uparrow$ σημειώνεται ο n=0 όρος του σήματος.

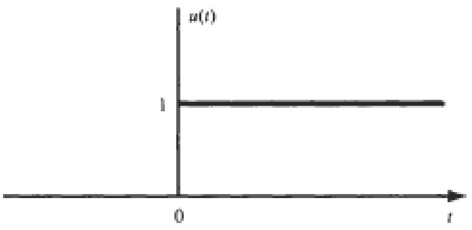
1.2. Βασικά σήματα

(A) Το **μοναδιαίο βηματικό σήμα** $u(t)$ (ή συνάρτηση Heaviside) είναι το σήμα που ορίζεται από την σχέση:

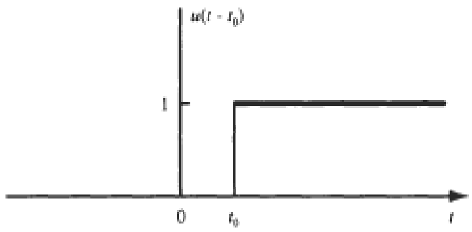
$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

Το **μετατοπισμένο μοναδιαίο βηματικό σήμα** $u(t - t_0)$ είναι το σήμα που ορίζεται από την σχέση:

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 1 & t > t_0 \\ \\ 0 & t < t_0 \end{cases}$$

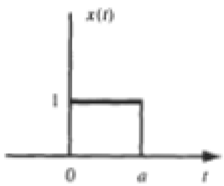


μοναδιαίο βηματικό σήμα



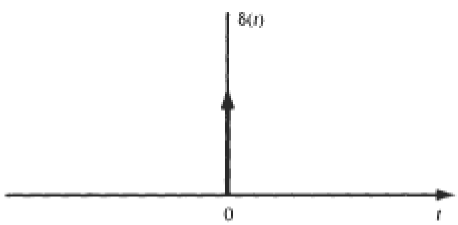
μετατοπισμένο μοναδιαίο βηματικό σήμα

Παράδειγμα 1.2.1
Η γραφική παράσταση του σήματος $x(t) = u(t) - u(t - \alpha)$, $\alpha > 0$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



(Β) Η **μοναδιαία ώθηση** $\delta(t)$, είναι το σήμα που ορίζεται από την σχέση:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \text{απροσδιόριστη} & t = 0 \end{cases}$$

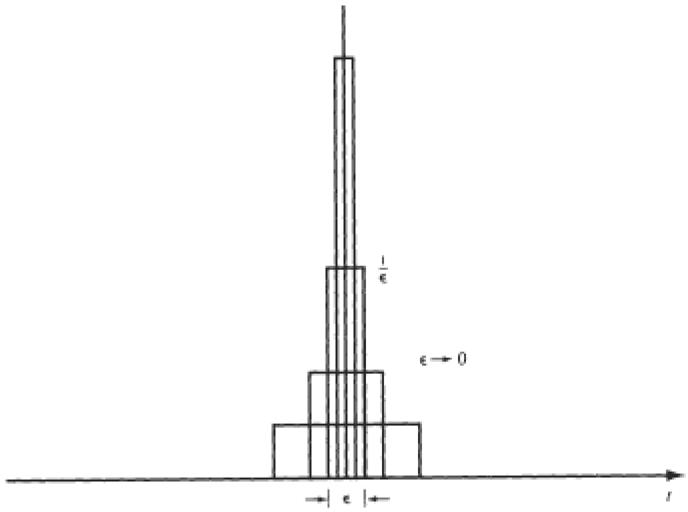


Η μοναδιαία ώθηση $\delta(t)$ παριστάνεται με ένα βέλος στο σημείο $t = 0$. Είναι γνωστή και ως συνάρτηση **δέλτα του Dirac**.

Ορίζεται συνήθως σαν το όριο μιας κατάλληλα επιλεγμένης («συνηθισμένης») συνάρτησης η οποία έχει μοναδιαίο εμβαδόν σ' ένα απειροστό χρονικό διάστημα (δείτε την παρακάτω γραφική παράσταση) και έχει τις ιδιότητες:

(α) $\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$

(β) $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t)dt = 1$



Μαθηματικά ορίζεαται από την σχέση:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0),$$

όπου $f(t)$ συνεχής συνάρτηση στο σημείο $t_0 = 0$ (η έκφραση αυτή είναι συμβολική και δεν είναι ολοκλήρωμα Riemann, κατά τα συνηθισμένα).

Ένας εναλλακτικός τρόπος ορισμού της συνάρτησης $\delta(t)$ είναι και ο:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\delta(t)dt = \begin{cases} f(0) & \alpha < 0 < \beta \\ 0 & \alpha < \beta < 0 \text{ ή } 0 < \alpha < \beta \\ \text{απροσδιόριστη} & \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση αυτή, είναι από τις πιο βασικές στην μελέτη των σημάτων, έχει δε μερικές επιπλέον σημαντικές ιδιότητες.

Πρόταση 1.2.2 (Ιδιότητες της συνάρτησης δέλτα)

i) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$, όπου $f(t)$ συνεχής συνάρτηση στο σημείο t_0

iii) $\delta(\lambda t) = \frac{1}{|\lambda|}\delta(t)$ (λ σταθερά και $\lambda \neq 0$)

iv) $\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$

v) Ισχύει:

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$

εάν η $x(t)$ είναι συνεχής στο σημείο $t_0 = 0$ και γενικότερα

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

εάν η $x(t)$ είναι συνεχής στο σημείο $t_0 = 0$

vi) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t)dt = -f'(0)$, όπου $f(t)$ συνεχής συνάρτηση στο σημείο $t_0 = 0$

Οι συναρτήσεις $u(t), \delta(t)$ είναι γνωστές ως **γενικευμένες συναρτήσεις**.

Παρατήρηση 1.2.3
Από τις ιδιότητες ii) και iii) προκύπτει ότι, ένα σήμα $x(t)$ μπορεί να γραφεί σαν:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

Παράδειγμα 1.2.4
Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα

(α) $\int_{-\infty}^{\infty} cos\pi t\ \delta(t-2)dt$

(β) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4t}\delta(3t-6)dt$

(γ $\int_{1}^{2}(t+5)\ \delta(t)dt$

(δ) $\int_{-1}^{2}(t+5)\ \delta(t)dt$

(ε) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4t}\delta'(t)dt$

Λύση

(α) Από την ιδιότητα ii) της συνάρτησης $\delta(t)$ έχουμε:

$$\int_{-\infty}^{\infty} cos\pi t\ \delta(t-2)dt = cos2\pi = 1$$

(β) Χρησιμοποιώντας πρώτα την ιδιότητα iii) της συνάρτησης $\delta(t)$ έχουμε:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4t}\delta(3t-6)dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4t}\delta(3(t-2))dt = \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4t}\delta(t-2)dt$$

Και από την ιδιότητα ii), τελικά

$$\frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4t}\delta(t-2)dt = \frac{1}{3}e^{-4\,2} = \frac{1}{3}e^{-8}$$

(γ) Από τον εναλλακτικό τρόπο ορισμού της συνάρτησης $\delta(t)$, για α=1, β=2, έχουμε:

$$\int_{1}^{2}(t+5)\ \delta(t)dt = 0$$

(δ) Και πάλι, από τον εναλλακτικό τρόπο ορισμού της συνάρτησης $\delta(t)$ για α=-1, β=2 έχουμε:

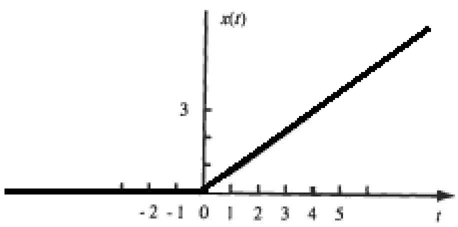
$$(\int_{-1}^{2}(t+5)\ \delta(t)dt = (0+5) = 5$$

(ε) Από την ιδιότητα vi) της συνάρτησης $\delta(t)$, έχουμε:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4t}\delta'(t)dt = -(e^{-4t})'|_{t=0} = -(-4)e^{-4t}|_{t=0} = 4$$

(Γ) Η **μοναδιαία αναρρίχηση** $r(t)$, είναι το σήμα που ορίζεται από την σχέση:

$$r(t) = \begin{cases} 0 & ,t<0 \\ t & ,t>0 \end{cases}$$



Παρατήρηση 1.2.5

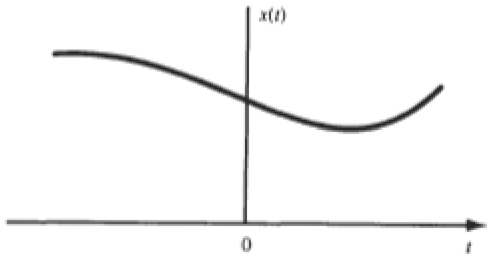
Η παράγωγος του σήματος μοναδιαίας αναρρίχησης είναι το μοναδιαίο βηματικό σήμα, δηλαδή:

$$\frac{dr(t)}{dt} = u(t)$$

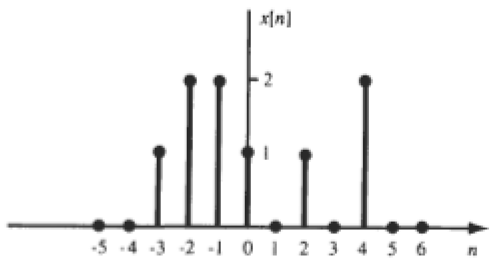
1.3 Ταξινόμηση σημάτων

Τα σήματα διακρίνονται στις παρακάτω βασικές κατηγορίες.

Ορισμός 1.3.1 (σήματα συνεχούς ή διακριτού χρόνου)
Εάν η μεταβλητή t ενός σήματος $x(t)$ παίρνει τιμές σ'ενα διάστημα (α,β), τότε το σήμα καλείται **συνεχούς χρόνου**. Εάν το t παίρνει διακριτές τιμές, τότε το $x(t)$ ονομάζεται **διακριτού χρόνου** (και συμβολίζεται με $x[n]$). Στην διακριτή περίπτωση, ένα σήμα θεωρείται, συνήθως, σαν μια ακολουθία αριθμών.



σήμα συνεχούς χρόνου

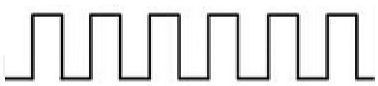


σήμα διακριτού χρόνου

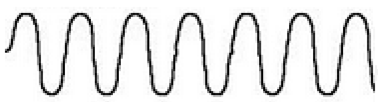
Παράδειγμα 1.3.2
Το σήμα (I) παραπάνω είναι διακριτού χρόνου, ενώ τα σήματα (II) και (III) συνεχούς χρόνου.

Ορισμός 1.3.3 (Αναλογικά - ψηφιακά σήματα)
Εάν η συνάρτηση $x(t)$ (συνεχούς χρόνου σήμα) μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή σ΄ένα διάστημα (α,β), τότε το σήμα καλείται **αναλογικό σήμα.**

Εάν η $x[n]$ (διακριτού χρόνου σήμα) παίρνει ένα πεπερασμένο πλήθος διακριτών τιμών, τότε το σήμα καλείται **ψηφιακό**.



Ψηφιακό σήμα



Αναλογικό σήμα

Παράδειγμα 1.3.4

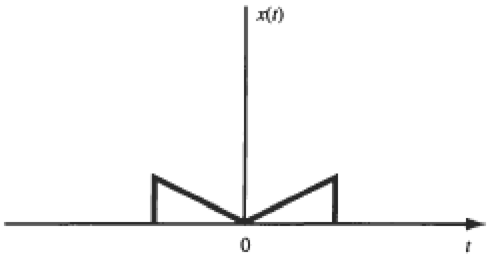
Τα σήματα (II) και (III) του παραπάνω παραδείγματος είναι αναλογικά σήματα (σήματα συνεχούς χρόνου). Το σήμα:

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n, \qquad n = 0,1,2,3,4,5$$

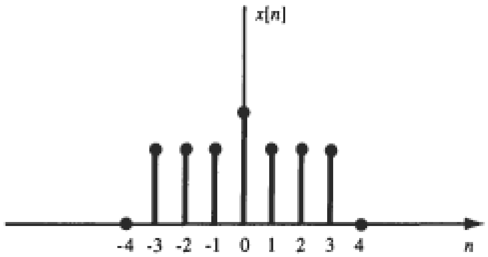
είναι ψηφιακό.

Ορισμός 1.3.5 (Άρτια -περιττά σήματα)

(α) Ένα σήμα $x(t)$ καλείται **άρτιο** όταν ισχύει $x(-t) = x(t)$ (ή $x[-n] = x[n]$) . Η γραφική παράσταση ενός άρτιου σήματος παρουσιάζει συμμετρία ως προς τον κατακόρυφο άξονα.

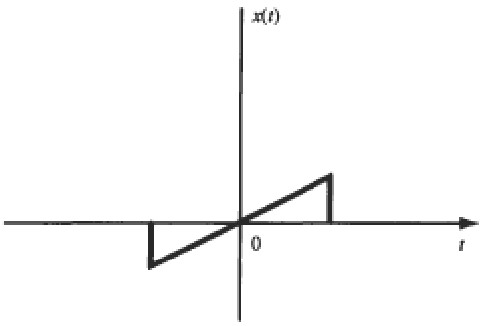


Συνεχές άρτιο σήμα

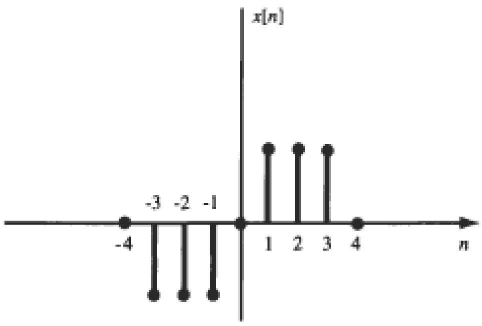


διακριτό άρτιο σήμα

(β) Ένα σήμα $x(t)$ είναι **περιττό** όταν ισχύει $x(-t) = -x(t)$ (ή $x[-n] = -x[n]$). Η γραφική παράσταση ενός περιττού σήματος παρουσιάζει συμμετρία ως προς την αρχή αξόνων.



Συνεχές περιττό σήμα



διακριτό περιττό σήμα

Παράδειγμα 1.3.6

Το σήμα $x(t) = cost$ είναι άρτιο ενώ το σήμα $x(t) = sint$ είναι περιττό.

Πρόταση 1.3.7
Μπορεί να δειχθεί ότι κάθε σήμα συνεχούς χρόνου $x(t)$ γράφεται στη μορφή:

$$x(t) = x_\alpha(t) + x_\pi(t)$$

όπου το σήμα $x_\alpha(t)$ είναι άρτιο και το σήμα $x_\pi(t)$ είναι περιττό.

Απόδειξη
Έστω ότι:

$$x(t) = x_\alpha(t) + x_\pi(t) \qquad (1)$$

Εάν δίνεται το σήμα $x(t)$ αρκεί να προσδιορίσουμε τα σήματα $x_\alpha(t), x_\pi(t)$.

Αν στη σχέση (1) θέσουμε όπου t το –t, παίρνουμε:

$$x(-t) = x_\alpha(-t) + x_\pi(-t) \qquad (2)$$

Όμως είναι $x_\alpha(-t) = x_\alpha(t)$ και $x_\pi(-t) = -x_\pi(t)$ αφού το σήμα $x_\alpha(t)$ είναι άρτιο και το σήμα $x_\pi(t)$ είναι περιττό. Έτσι η σχέση (2) γράφεται:

$$x(-t) = x_\alpha(t) - x_\pi(t) \qquad (3)$$

Εάν επιλύσουμε τις σχέσεις (1) και (3) ως προς $x_\alpha(t), x_\pi(t)$ (προσθέτοντας και αφαιρώντας κατά μέλη αντίστοιχα), παίρνουμε:

$$x_\alpha(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] \;\; \kappa\alpha\iota \; x_\pi(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]$$

Εφαρμογή
Να γραφεί το σήμα $x(t) = e^{-t}u(t)$ σαν άθροισμα ενός άρτιου και ενός περιττού σήματος.

Από το παραπάνω παράδειγμα, χρησιμοποιώντας σαν $x(t) = e^{-t}u(t)$, έχουμε:

$$x_\alpha(t) = \tfrac{1}{2}[e^{-t}u(t) + e^{t}u(-t)] \quad \text{και} \quad x_\pi(t) = \tfrac{1}{2}[e^{-t}u(t) - e^{t}u(-t)]$$

Παρατήρηση 1.3.8
Οι ορισμοί και οι προτάσεις που δίνουμε κάθε φορά για σήματα συνεχούς χρόνου, είναι ανάλογοι και για τα σήματα διακριτού χρόνου. Σε ότι ακολουθεί ασχολούμαστε μόνον με σήματα συνεχούς χρόνου.

Ορισμός 1.3.9 (πραγματικά - μιγαδικά σήματα)

Αν η $x(t)$ είναι μια πραγματική συνάρτηση του χρόνου t , τότε το σήμα $x(t)$ είναι ένα **πραγματικό σήμα**, ενώ εάν η $x(t)$ είναι μια μιγαδική συνάρτηση του χρόνου t , τότε το σήμα $x(t)$ είναι ένα **μιγαδικό σήμα**.

Παράδειγμα 1.3.10

Τα σήματα της μορφής:

$$x(t) = e^{i\omega t} = cos\omega t + i\ sin\omega t$$

είναι μιγαδικά (μιγαδικά εκθετικά σήματα). Γενικότερα, τα σήματα της μορφής:

$$x(t) = e^{st} = e^{(\sigma+i\omega)t} = e^{\sigma t}cos\omega t + i\ e^{\sigma t}sin\omega t$$

είναι μιγαδικά.

Ορισμός 1.3.11 (ντετερμινιστικά – τυχαία σήματα)

Ένα σήμα $x(t)$ καλείται **ντετερμινιστικό** εάν οι τιμές του προσδιορίζονται πλήρως για κάθε χρονική στιγμή. Μ' άλλα λόγια το σήμα είναι μια γνωστή συνάρτηση $x(t)$ του χρόνου t.

Τυχαία είναι τα σήματα, των οποίων οι τιμές σε κάθε χρονική στιγμή χαρακτηρίζονται από ένα είδος τυχαιότητας (αποτελούν μιά τυχαία μεταβλητή) και τα οποία περιγράφονται πιθανοθεωρητικά. Μελέτη των τυχαίων σημάτων γίνεται σε κεφάλαιο που ακολουθεί.

Παράδειγμα 1.3.12

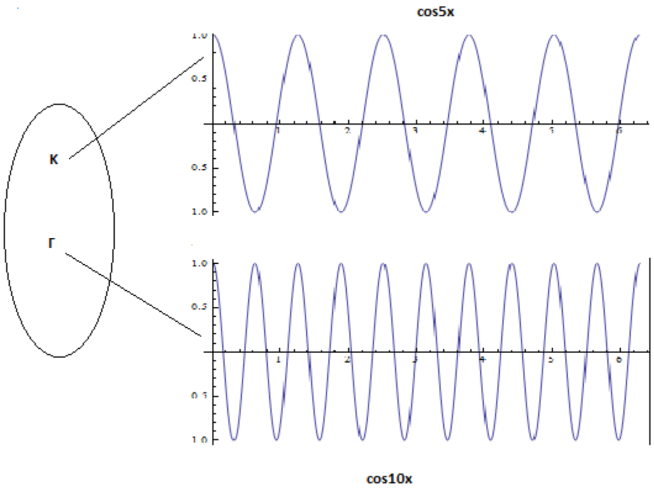
(α) Όλα τα παραπάνω σήματα είναι ντετερμινιστικά.

(β) Ένα παράδειγμα τυχαίου σήματος είναι και το ακόλουθο: Έστω ότι ρίχνουμε ένα νόμισμα τυχαία. Ο δειγματοχώρος του πειράματος είναι ως γνωστόν $\Omega = \{K, \Gamma\}$ (Κ=κεφαλή, Γ= γράμματα). Έστω:

$$X(t,K) = \mathrm{x}_1(\mathrm{t}) = \cos(5t)$$
$$X(t,\Gamma) = \mathrm{x}_2(\mathrm{t}) = \cos(10t)$$

Η $X(t)$ είναι ένα **τυχαίο** σήμα.

Η τυχαιότητα του προέρχεται από το αποτέλεσμα της ρίψης του νομίσματος. Εάν το αποτέλεσμα της ρίψης είναι Γ, τότε το σήμα είναι ίσο με $X(t) = \mathrm{x}_2(\mathrm{t}) = \cos(10t)$ ενώ εάν το αποτέλεσμα της ρίψης είναι Κ, τότε το σήμα είναι $X(t) = \mathrm{x}_1(\mathrm{t}) = \cos(5t)$ (τα $\mathrm{x}_1(\mathrm{t})$, $\mathrm{x}_2(\mathrm{t})$ καλούνται **τροχιές** του τυχαίου σήματος).

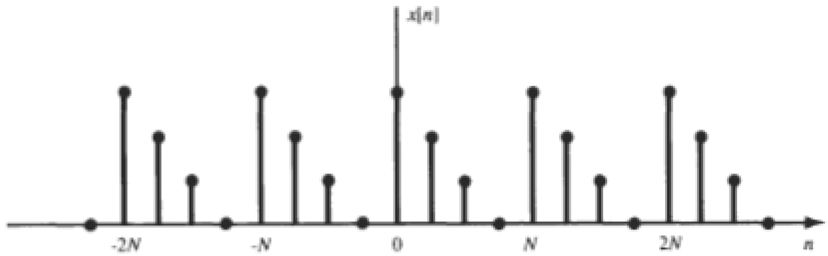


Ορισμός 1.3.13 (Περιοδικά σήματα)
Ένα σήμα συνεχούς χρόνου $x(t)$ ονομάζεται **περιοδικό** εάν υπάρχει μιά σταθερά T τέτοια ώστε για κάθε t να ισχύει:

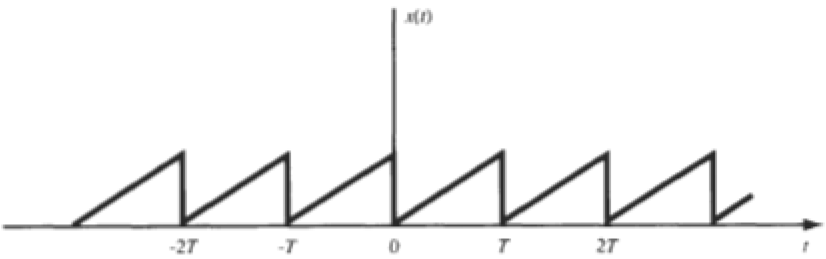
$$x(t+T) = x(t).$$

Ο ελάχιστος θετικός αριθμός T για τον οποίο ισχύει η σχέση αυτή ονομάζεται **περίοδος** του περιοδικού σήματος $x(t)$.

Η γραφική παράσταση του περιοδικού σήματος $x(t)$, περιόδου T, αποτελείται από τμήματα τα οποία επαναλαμβάνονται ανά χρονικά διαστήματα T.



Περιοδικό σήμα διακριτού χρόνου



Περιοδικό σήμα συνεχούς χρόνου

Παράδειγμα 1.3.14
Το σήμα $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ όπου A, ω, φ είναι σταθερές είναι περιοδικό με περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (1).

Απόδειξη
Έχουμε ότι:

$$x(t+T) = A\cos[\omega(t+T) + \varphi] = A\cos(\omega t + \omega T + \varphi)$$

Αλλά, σύμφωνα με τη σχέση (1) είναι $\omega T = 2\pi$ οπότε παίρνουμε:

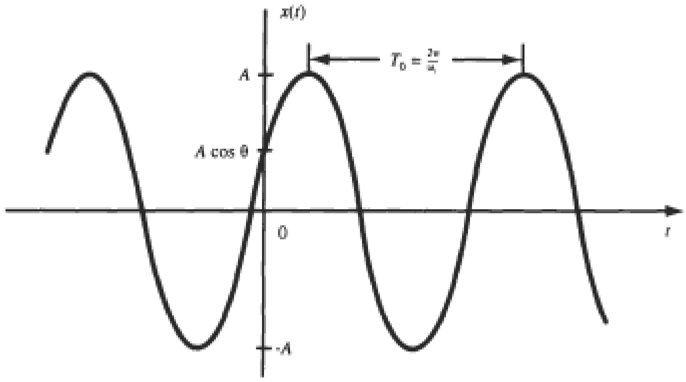
$$x(t+T) = A\cos(\omega t + 2\pi + \varphi)$$

$$= A\cos(\omega t + \varphi + 2\pi) = A\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow x(t+T) = x(t)$$

(αφού ισχύει $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$).

Δηλαδή, το σήμα $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ όπου A, ω, φ είναι σταθερές είναι περιοδικό με περίοδο Τ.

Η γραφική παράσταση του σήματος αυτού φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Παρατήρηση 1.3.15
Τα κύματα της παραπάνω μορφής καλούνται **ημιτονοειδή**. Το Α καλείται **πλάτος**, το ω **γωνιακή συχνότητα** και το φ γωνία φάσης. Το $T = \frac{2\pi}{\omega}$ καλείται **περίοδος**.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι ισχύει η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 1.3.16
Εάν $x_1(t)$, $x_2(t)$ δύο περιοδικά σήματα με αντίστοιχες περιόδους T_1 και T_2. Το σήμα $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ είναι περιοδικό εάν ο λόγος των περιόδων τους $\frac{T_1}{T_2}$ είναι ένας ρητός αριθμός $\frac{T_1}{T_2} = \frac{k}{m}$ (k,m ακέραιοι).

Η περίοδος Τ του νέου κύματος είναι το Ε.Κ.Π. των T_1 και T_2, δηλαδή:

$$T = mT_1 = kT_2$$

Παράδειγμα 1.3.17

Να εξεταστεί εάν καθένα από τα παρακάτω σήματα είναι περιοδικό ή όχι. Στην περίπτωση που ένα σήμα είναι περιοδικό, να βρεθεί η περίοδός του.

(α) $x(t) = 2\cos\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)$

(β) $x(t) = cos^2\,(4t)$

(γ) $x(t) = cos3t + sin\sqrt{3}t$

(δ) $x(t) = cos5t + sin3t$

(ε) $x(t) = e^{i3t}$

(στ) $x(t) = e^{3t}sint$

Λύση

(α) Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο παράδειγμα, έχουμε για $\omega = 3$, ότι το σήμα $x(t) = 2\cos\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)$ είναι περιοδικό με περίοδο $T = \frac{2\pi}{3}$.

(β) Είναι γνωστό ότι: $cos^2\,\alpha = \frac{1+cos2a}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos2a$ οπότε:

$cos^2\,(4t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos8t$. Αλλά το σήμα $x_1(t) = \frac{1}{2}$ είναι περιοδικό με οποιαδήποτε περίοδο, ενώ το σήμα $x_2(t) = \frac{1}{2}cos8t$ είναι περιοδικό με περίοδο $T = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$.

Άρα το σήμα που μας δίνεται είναι περιδικό με περίοδο $T = \frac{\pi}{4}$

(γ) Το σήμα $x_1(t) = cos3t$ είναι περιοδικό με περίοδο $T_1 = \frac{2\pi}{3}$, ενώ το σήμα $x_2(t) = sin\sqrt{3}t$ είναι περιοδικό με περίοδο $T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. Επειδή ο λόγος $\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ είναι άρρητος αριθμός, το σήμα δεν είναι περιοδικό.

(δ) Το σήμα $x_1(t) = cos5t$ είναι περιοδικό με περίοδο $T_1 = \frac{2\pi}{5}$, ενώ το σήμα $x_2(t) = sin3t$ είναι περιοδικό με περίοδο $T_2 = \frac{2\pi}{3}$. Επειδή ο λόγος $\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{2\pi}{5}}{\frac{2\pi}{3}} = \frac{3}{5}$ είναι ρητός αριθμός, το σήμα είναι περιοδικό. Η περίοδος του σήματος είναι ίση με: $T = 5T_1 = 3T_2 = 2\pi$

(ε) Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Euler, έχουμε:

$$x(t) = e^{i3t} = cos3t + i\,sin3t$$

Επειδή καθένα από τα σήματα $x_1(t) = cos5t$, $x_2(t) = sin3t$ είναι περιοδικό με περίοδο $T = \frac{2\pi}{3}$, το σήμα που μας δίνεται είναι περιοδικό με περίοδο $T = \frac{2\pi}{3}$.

(στ) Για να είναι το σήμα περιοδικό, θα πρέπει να υπάρχει ένα T τ.ω

$$x(t+T) = e^{3(t+T)} sin(t+T) = e^{3t} sint = x(t) \text{ για κάθε } t$$

Θα πρέπει δηλαδή να έχουμε:

$$e^{3T} sin(t+T) = sint$$

που δεν συμβαίνει για κάθε t (οποιαδήποτε και αν είναι η τιμή της σταθεράς T), π.χ για $T = \frac{\pi}{3}$ θα έπρεπε να έχουμε:

$$e^{3\frac{\pi}{3}} sin\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = sin2\pi \quad \text{ή} \quad e^{\pi} sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$$

που δεν συμβαίνει.

Ορισμός 1.3.18 (Μέση χρονική τιμή περιοδικού σήματος)
Η **μέση χρονική τιμή** περιοδικού σήματος $x(t)$ περιόδου T δίνεται από τη σχέση:

$$< x(t) > = \frac{1}{T} \int_{(T)} x(t)dt$$

όπου το σύμβολο (T) κάτω από το σύμβολο του ολοκληρώματος σημαίνει ότι η ολοκλήρωση αυτή γίνεται κατά μήκος μίας περιόδου, δηλαδή:

$$< x(t) > = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt \quad \text{ή} \quad < x(t) > = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt$$

Η μέση χρονική σήματος έχει τις ιδιότητες:

$< cx(t) > = c < x(t) >$

$< x(t) + y(t) > = < x(t) > + < y(t) >$

Το σταθερό χρονικά σήμα $x(t) = \alpha$ προφανώς είναι περιοδικό με μέση χρονική τιμή $< x(t) > = \alpha$.

Παράδειγμα 1.3.19
Το περιοδικό σήμα $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, το οποίο όπως δείξαμε παραπάνω είναι περιοδικό με περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$, έχει μέση χρονική τιμή:

$$< x(t) > = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T A\cos(\omega t+\varphi)dt$$

$$= [\frac{A}{T\omega}\sin(\omega t+\varphi)]_0^T = \frac{A}{T\omega}[\sin(\omega T+\varphi) - \sin\varphi]$$

Και επειδή $T = \frac{2\pi}{\omega}$ είναι $\omega T = 2\pi$, έχουμε:

$$< x(t) > = \frac{A}{2\pi}[\sin(2\pi+\varphi) - \sin\varphi] = \frac{A}{2\pi}(\sin\varphi - \sin\varphi) = 0.$$

1.4 Ενέργεια και ισχύς σήματος

Έστω ότι έχουμε μια αντίσταση, με τιμή R=1Ω, και έστω $u(t)$ η τάση στα άκρα της. Η τιμή της $u(t)$ μεταβάλλεται αναφορικά με τον χρόνο οπότε η $u(t)$ μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα σήμα συνεχούς χρόνου $x(t)$. Η στιγμιαία ισχύς $p(t)$ που καταναλώνεται στην (ωμική) αντίσταση R είναι:

$$p(t) = \frac{u^2(t)}{R} = u^2(t) \Rightarrow p(t) = u^2(t)$$

(R=1Ω). Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε τη στιγμιαία ισχύς $p_x(t)$ ενός σήματος $x(t)$:

$$p(t) = x^2(t) = |x(t)|^2$$

Ορισμός 1.4.1

(α) Η **ενέργεια του σήματος,** στο χρονικό διάστημα $\frac{-T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ διάρκειας T, είναι:

$$E_T = \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

(β) Η **μέση ισχύς** στο διάστημα $\frac{-T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ είναι:

$$S_T = \frac{E_T}{T} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2\, dt$$

(γ) Η **ολική ενέργεια** του σήματος είναι:

$$E = \lim_{T \to +\infty} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 \, dt$$

(δ) Και η αντίστοιχη **μέση ισχύς** είναι

$$S = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 \, dt$$

Ορισμός 1.4.2

Αν η ολική ενέργεια E του σήματος είναι πεπερασμένη και μη μηδενική, το σήμα καλείται **ενεργειακό**. Αν η μέση ισχύς του σήματος S είναι πεπερασμένη και μη μηδενική, το σήμα καλείται **σήμα ισχύος**.

Πρόταση 1.4.3

(I) Ένα σήμα ισχύος έχει άπειρη ενέργεια.

(II) ένα ενεργειακό σήμα έχει μηδενική ισχύ.

(III) Ένα περιοδικό σήμα είναι ενεργειακό εάν η ενέργειά του σε κάθε διάστημα μιάς περιόδου είναι πεπερασμένη. Ακόμα η ισχύς του σήματος υπολογίζεται σε διάστημα μιάς περιόδου.

Παρατήρηση 1.4.4

Για να διαπιστώσουμε αν ένα σήμα είναι ενεργειακό ή σήμα ισχύος, πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα:

$$\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt.$$

Μετά υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{T \to +\infty} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt.$$

Αν το όριο αυτό υπάρχει, είναι πεπερασμένο και δίαφορο του μηδενός, τότε το σήμα $x(t)$ είναι ενεργειακό.

Αν το όριο αυτό δεν υπάρχει ή είναι ίσο με $+\infty$, τότε υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt.$$

Αν το όριο αυτό υπάρχει είναι πεπερασμένο και διάφορο του μηδενός, τότε το σήμα $x(t)$ είναι σήμα ισχύος.

Αν δεν συμβαίνει τίποτα από τα παραπάνω, το σήμα $x(t)$ δεν είναι σήμα ενέργειας αλλά ούτε σήμα ισχύος.

Παράδειγμα 1.4.5

Να εξετασθεί αν το σήμα $x(t) = A\cos(\omega t)$, όπου A, ω θετικές σταθερές , είναι σήμα ισχύος ή για σήμα ενέργειας.

Λύση

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα

$$E_T = \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2\, dt = \int_{-T/2}^{T/2} A^2\, [\cos(\omega t)]^2\, dt = A^2 \int_{-T/2}^{T/2} [\cos(\omega t)]^2\, dt$$

Η ολοκληρωτέα συνάρτηση $f(t) = [\cos(\omega t)]^2$ είναι άρτια ($f(-t) = f(t)$) και τα άκρα της ολοκλήρωσης είναι συμμετρικά.

Άρα έχουμε:

$$E_T = 2A^2 \int_0^{T/2} [\cos(\omega t)]^2\, dt$$

Χρησιμοποιώντας τη γνωστή τριγωνομετρική ταυτότητα: $(\cos\varphi)^2 = \frac{(1+\cos 2\varphi)}{2}$

Έχουμε:

$$E_T = 2A^2 \int_0^{T/2} \frac{1+\cos(2\omega t)}{2}\, dt = A^2 \int_0^{T/2} [1+\cos(2\omega t)]dt$$

$$= [A^2 t + \frac{A^2}{2\omega}\sin(2\omega t)]_0^{T/2} \Rightarrow$$

$$E_T = \frac{A^2 T}{2} + \frac{A^2}{2\omega}\sin(\omega T)$$

Είναι γνωστό ότι δεν υπάρχουν τα όρια των τριγωνομετρικών συναρτήσεων $\sin x$, $\cos x$ γιά $x \to +\infty$. Άρα δεν υπάρχει το όριο της E_T $\gamma\acute{\iota}\alpha\; T \to +\infty$. Επομένως το σήμα αυτό δεν είναι σήμα ενέργειας.

Θεωρούμε το όριο:

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} E_T = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}[\frac{A^2 T}{2} + \frac{A^2}{2\omega}\sin(\omega t)]$$

$$= \lim_{T\to+\infty}[\frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2\omega T}\sin(\omega T)] = \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2\omega}\lim_{T\to+\infty}\frac{\sin(\omega T)}{T}$$

Όμως ισχύει

$$\left|\frac{\sin(\omega T)}{T}\right| \leq \frac{1}{T} \Rightarrow \lim_{T\to+\infty}\frac{\sin(\omega T)}{T} = 0$$

Γιά $T \to +\infty$ το $\frac{1}{T} \to 0$ Τελικά:

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}E_T = \frac{A^2}{2} \Rightarrow S = \frac{A^2}{2}$$

Επομένως το σήμα $x(t)$ είναι σήμα ισχύος.

Παράδειγμα 1.4.6

Να εξετασθεί αν το σήμα:

$$x(t) = \begin{cases} 0\ , & t < 0 \\ Ae^{-\lambda t} & t > 0 \end{cases} \quad \text{όπου } A, \lambda \text{ θετικές σταθερές}$$

είναι σήμα ισχύος ή για σήμα ενέργειας.

Λύση

Έχουμε:

$$E_T = \int_{-T/2}^{T/2}|x(t)|^2 dt = \int_{-T/2}^{0} 0dt + \int_0^{T/2}\left|Ae^{-\lambda t}\right|^2 dt = \int_0^{T/2} A^2 e^{-2\lambda t}\, dt$$

$$= A^2\int_0^{T/2} e^{-2\lambda t}\, dt = [\frac{A^2}{-2\lambda}e^{-2\lambda t}]_0^{T/2} = \frac{A^2}{2\lambda}(1 - e^{-\lambda T})$$

Επειδή $\lambda > 0$ για $T \to +\infty$ έχουμε ότι: $e^{-\lambda T} \to 0$. Επομένως

$$\lim_{T\to+\infty} E_T = \frac{A^2}{2\lambda}$$

Δηλαδή το σήμα είναι ενεργειακό.

Παράδειγμα 1.4.7

Να εξετασθεί αν το σήμα $x(t) = tu(t)$ είναι σήμα ισχύος ή για σήμα ενέργειας.

Λύση

Το ολοκλήρωμα:

$$E_T = \int_{-T/2}^{T/2}|x(t)|^2\, dt = \int_0^{T/2} t^2\, dt$$

Απ’ όπου έχουμε:

$$\lim_{T\to+\infty} E_T = \lim_{T\to+\infty} \frac{\left({}^{T}\!/_{2}\right)^3}{3} = +\infty$$

Δηλαδή, δεν υπάρχει το όριο της E_T $\gamma \acute{\iota} \alpha\, T \to +\infty$. Επομένως, το σήμα αυτό δεν είναι σήμα ενέργειας.

Ακόμα,

$$P = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} E_T = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \frac{\left({}^{T}\!/_{2}\right)^3}{3} = +\infty$$

Επομένως το σήμα $x(t)$ δεν είναι ούτε σήμα ισχύος.

1.5 Συνέλιξη σημάτων συνεχούς χρόνου

Ένας μαθηματικός τρόπος με τον οποίο κάποιος μπορεί να συνδυάσει δύο σήματα και να «σχηματίσει» ένα τρίτο σήμα, είναι με την λεγόμενη **συνέλιξη** των δύο σημάτων.

Ορισμός 1.5.1

Αν $x(t), y(t)$ είναι δυο σήματα συνεχούς χρόνου, τότε η **συνέλιξη** $x(t) * y(t)$ των σημάτων αυτών ορίζεται από τη σχέση:

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau$$

(στην περίπτωση που το ολοκλήρωμα έχει νόημα).

Παρατήρηση 1.5.2

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο από τη μεταβλητή ολοκλήρωσης τ και επομένως το αποτέλεσμα είναι μια συνάρτηση της μεταβλητής t.

Πρόταση 1.5.3 (Ιδιότητες της συνέλιξης)

Αν τα σήματα $x(t), y(t), f(t)$ είναι σήματα συνεχούς χρόνου, τότε ισχύει ότι:

i) $x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$ (αντιμεταθετική ιδιότητα)

ii) $\big(x(t) * y(t)\big) * f(t) = x(t) * \big(y(t) * f(t)\big)$ (προσεταιριστική ιδιότητα)

iii) Επιμεριστική ιδιότητα της συνέλιξης ως προς την πρόσθεση.

$$x(t) * \big(y(t) + f(t)\big) = x(t) * y(t) + x(t) * f(t)$$

iv) Συνέλιξη ενός σήματος $x(t)$ με το μοναδιαίο βηματικό σήμα $u(t)$.

$$u(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

γιατί: $x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)u(t-\tau)d\tau$ και $u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq \tau \\ 0 & t < \tau \end{cases}$, οπότε:

$$x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

Γενικότερα ισχύει:

$$u(t-t_0) * x(t) = \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\tau)d\tau$$

v) Συνέλιξη ενός σήματος $x(t)$ με την μοναδιαία ώθηση $\delta(t)$.

$$\delta(t) * x(t) = x(t)$$

γιατί:

$$\delta(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(\tau-t)d\tau = x(t)$$

Γενικότερα ισχύει:

$$\delta(t-t_0) * x(t) = x(t-t_0)$$

vi) Συνέλιξη μετατοπισμένων σημάτων

Αν

$$f(t) = x(t) * y(t) \Rightarrow$$

$$x(t-t_1) * y(t-t_2) = f(t-t_1-t_2)$$

Παρατήρηση 1.5.4

Για την εύρεση της συνέλιξης δύο σημάτων απαιτείται ο υπολογισμός ενός γενικευμένου ολοκληρώματος, που τις περισσότερες φορές είναι διαδικασία δύσκολη. Τα βήματα που ακολουθούμε είναι συνήθως τα εξής.

(α) Αν τα σήματα $x(t), y(t)$ ορίζονται το καθένα από ενιαίο τύπο για κάθε t, τότε η συνέλιξη $x(t) * y(t)$ υπολογίζεται αμέσως από το ολοκλήρωμα:

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

ή το

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

όποιο από τα δύο θεωρούμε ότι είναι ευκολότερο στον υπολογισμό.

(β) Εάν ένα από τα σήματα $x(t), y(t)$ έστω το $x(t)$ είναι μη-μηδενικό μόνο σε ένα διάστημα της μορφής (t_1, t_2), το δε άλλο σήμα $y(t)$ ορίζεται από έναν ενιαίο τύπο για κάθε t, τότε υπολογίζουμε την συνλελιξη από το ολοκλήρωμα:

$$x(t) * y(t) = \int_{t_1}^{t_2} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

($x(\tau) = 0$ για $t < t_1$,$t > t_2$).

(γ) Εάν ένα από τα σήματα είναι το $u(t)$, τότε η συνέλιξη $x(t) * u(t)$ υπολογίζεται από τον τύπο:

$$x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

(θεωρούμε δηλαδή το $u(t)$ σαν πρώτο σήμα)

(δ) Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση κάνουμε (συνήθως) τα εξής:

(I) κατασκευάζουμε την γραφική παράσταση των $x(\tau), y(\tau)$.

(II) Επιλέγουμε εκείνο από τα σήματα, το οποίο θεωρούμε ότι έχει την πιο «απλή» γραφική παράσταση. Έστω ότι αυτό είναι το σήμα $y(\tau)$. Κατασκευάζουμε την γραφική παράσταση του σήματος $y(-\tau)$ (είναι η συμμετρική αυτής του $y(\tau)$, ως προς τον άξονα των y).

(III) Κατόπιν, κατασκευάζουμε την γραφική παράσταση του σήματος $y(t-\tau)$, γιά διάφορες τιμές του t. Είναι η γραφική παράσταση του σήματος $y(-\tau)$ μετατοπισμένη κατά t μονάδες δεξιά η αριστερά (εξαρτάται από την τιμή του t), πάνω στον άξονα των x.

(IV) Χρησιμοποιώντας τις γραφικές παραστάσεις των $x(\tau)$ και $y(t-\tau)$ (γιά τα διάφορα t) υπολογίζουμε την συνέλιξη των σημάτων από τον τύπο:

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

Παράδειγμα 1.5.5

Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων $x(t) = e^{-t^2}$, $y(t) = t$ εάν είναι γνωστό ότι: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

Λύση

Έχουμε ότι:

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2}(t-\tau)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2} t d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2} \tau d\tau = t \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} \tau e^{-\tau^2} d\tau = t\sqrt{\pi}$$

γιατί η συνάρτηση $\tau e^{-\tau^2}$ είναι περιττή οπότε, επειδή τα όρια ολοκλήρωσης είναι συμμετρικά, έχουμε $\int_{-\infty}^{\infty} \tau e^{-\tau^2} d\tau = 0$.

Παράδειγμα 1.5.6

Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων $e^t, u(t)$ όπου $u(t)$ είναι το μοναδιαίο βηματικό σήμα.

Λύση

Θεωρούμε $x(t) = u(t)$, $y(t) = e^t$ και έχουμε: (παίρνουμε το $x(t) = u(t)$ σαν πρώτο σήμα)

$$x(t) * y(t) = u(t) * e^t = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)e^{t-\tau} d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot e^{t-\tau} d\tau + \int_{0}^{\infty} 1 \cdot e^{t-\tau} d\tau = \int_{0}^{\infty} e^t e^{-\tau} d\tau$$

(αφού $u(\tau) = 0$ για $\tau < 0$ και $u(\tau) = 1$ γιά $\tau > 0$).

Αλλά

$$\int_{0}^{\infty} e^t e^{-\tau} d\tau = e^t \int_{0}^{\infty} e^{-\tau} d\tau = e^t [-e^{-\tau}]_0^{\infty} = e^t \cdot 1 = e^t$$

Επομένως: $x(t) * y(t) = u(t) * e^t = e^t$.

Παράδειγμα 1.5.7

Να βρεθεί η συνέλιξη των σημάτων $x(t) = \cos t$, $y(t) = u(t) - u(t-5)$.

Λύση

Το σήμα $y(t)$ είναι μη-μηδενικό μόνο για 0<t<5, με σταθερή τιμή 1. Θεωρούμε λοιπόν σαν «πρώτο» το σήμα $y(t)$ στην συνέλιξη (λόγω της παρατήρησης 1.5.4(γ)). Οπότε:

$$y(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_0^5 1 \cdot x(t-\tau)d\tau = \int_0^5 \cos(t-\tau)d\tau$$

$$= [-\sin(t-\tau)]_0^5 = \sin t - \sin(t-5)$$

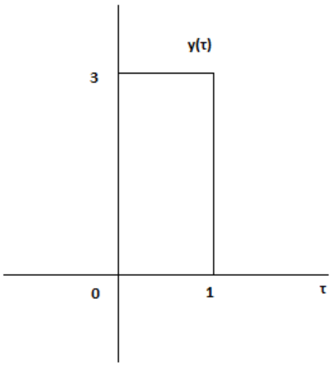
Οπότε $y(t) * x(t) = \sin t - \sin(t-5)$.

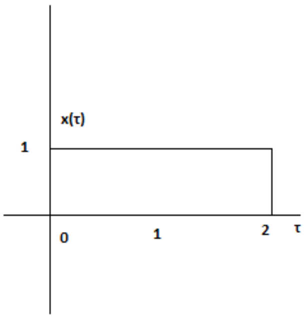
Παράδειγμα 1.5.8

Να βρεθεί η συνέλιξη των σημάτων $x(t) = u(t) - u(t-2)$, $y(t) = 3(u(t) - u(t-1))$.

Λύση

Η γραφική παράσταση των σημάτων φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.

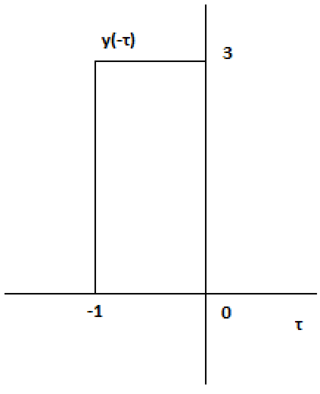




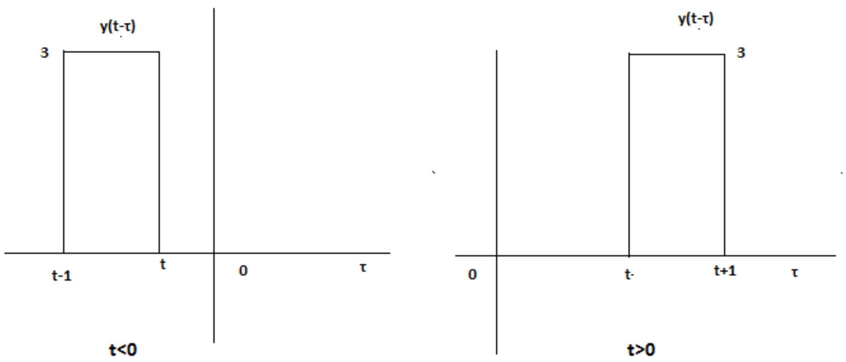
Για την συνέλιξη των σημάτων θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο:

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

Το γράφημα του σήματος $y(-\tau)$ φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί (συμμετρικό του $y(\tau)$ ως προς τον άξονα των y):



Το σήμα $y(t-\tau)$ προκύπτει από το $y(-\tau)$ μετατοπίζοντάς το κατά t μονάδες, δεξιά η αριστερά (ανάλογα με το πρόσημο του t), στον άξονα των x (δείτε τα σχήματα που ακολουθούν).

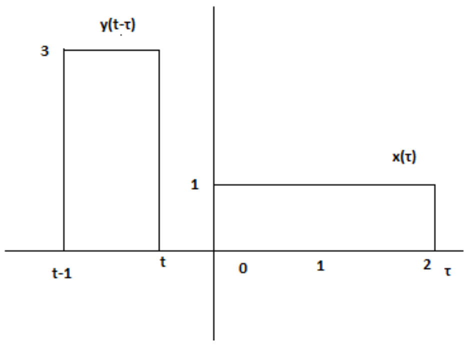


Για τον υπολογισμό της συνέλιξης λοιπόν, διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις (ανάλογα με τις τιμές του t).

(α) Αν $t \leq 0$ τότε:

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{2} y(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{2} 0\,d\tau = 0$$

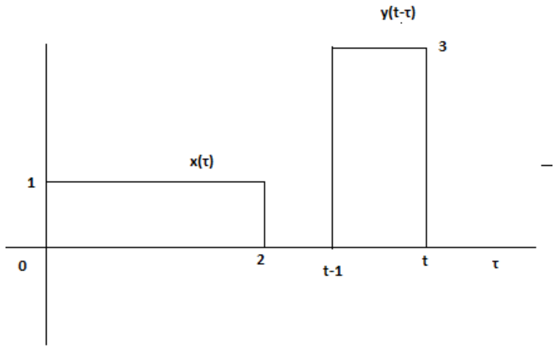
(γιατί $y(t-\tau) = 0$, στο διάστημα [0,2]).



(β) Αν $t > 3$ τότε:

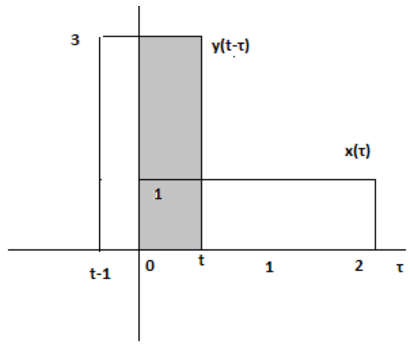
$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{2} y(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{2} 0\,d\tau = 0$$

(γιατί $y(t-\tau) = 0$, στο διάστημα $[3, +\infty)$).



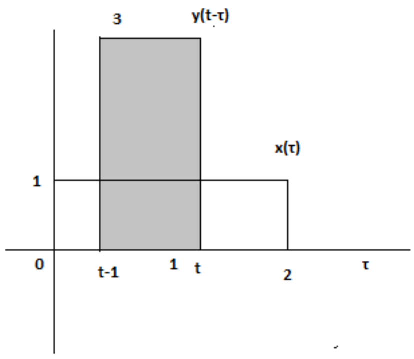
(γ) Αν $0 < t \leq 1$ τότε:

$$x(t) * y(t) = \int_{0}^{t} y(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{t} 3d\tau = 3t$$



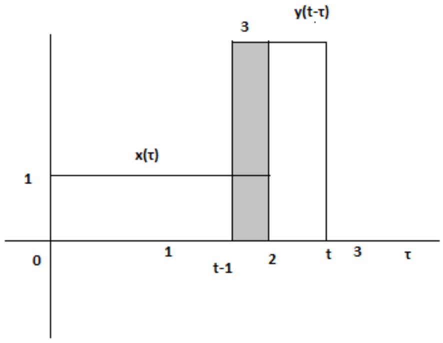
(δ) Αν $1 < t \leq 2$ τότε:

$$x(t) * y(t) = \int_{t-1}^{t} y(t-\tau)\,d\tau = \int_{t-1}^{t} 3d\tau = 3\big(t-(t-1)\big) = 3$$



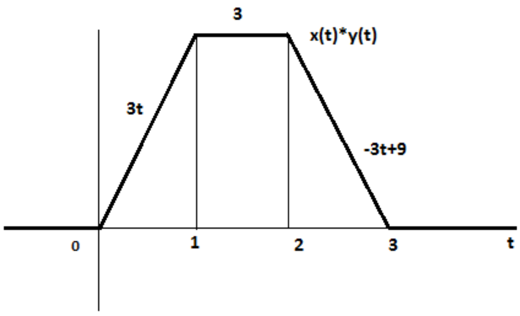
(ε) Αν $2 < t \leq 3$ τότε:

$$x(t) * y(t) = \int_{t-1}^{2} y(t-\tau)\,d\tau = \int_{t-1}^{2} 3d\tau = 3\big(2-(t-1)\big) = -3t+9$$



Τελικά, η συνέλιξη των δύο σημάτων είναι ίση με:

$$x(t) * y(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 3t & 0 < t \leq 1 \\ 3 & 1 < t \leq 2 \\ -3t + 9 & 2 < t \leq 3 \\ 0 & t > 3 \end{cases}$$



Κεφάλαιο 2 Συστήματα σημάτων

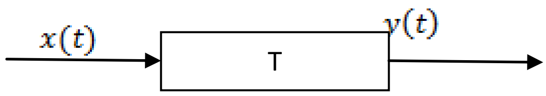
2.1 Συστήματα

Σύστημα ονομάζεται ένας οποιοσδήποτε μηχανισμός ο οποίος δέχεται ένα σήμα $x(t)$ και ανταποκρίνεται με ένα σήμα $y(t)$.

Ορισμός 2.1.1
Σύστημα είναι ένα μαθηματικό μοντέλο μιάς φυσικής διαδικασίας, το οποίο μοντέλο συσχετίζει ένα «εισερχόμενο» σήμα $x(t)$ μ' ένα «εξερχόμενο» σήμα $y(t)$.

Μιλώντας αυστηρά μαθηματικά, το σύστημα μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας μετασχηματισμός T του σήματος $x(t)$ στο σήμα $y(t)$

Σχηματικά

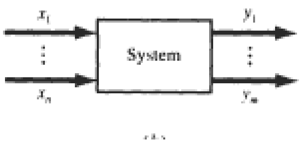


Δηλαδή:

$$y(t) = T(x(t)).$$

Το σήμα $x(t)$ ονομάζεται **σήμα εισόδου** ή **είσοδος** του συστήματος, ενώ το σήμα $y(t)$ ονομάζεται **σήμα εξόδου** ή **έξοδος** του συτήματος.

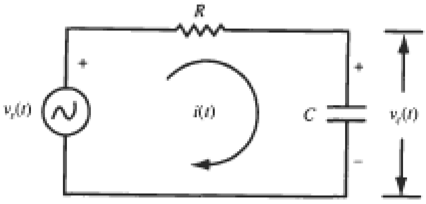
Παρατήρηση 2.1.2
Ένα σύστημα μπορεί να δέχεται συγχρόνως περισσότερα από ένα σήματα εισόδου αλλά και να ανταποκρίνεται με περισσότερα από ένα σήματα εξόδου. Σχηματικά:



Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε με συστήματα τα οποία δέχονται ένα σήμα εισόδου και ανταποκρίνονται με ένα σήμα εξόδου. Τα συστήματα αυτά είναι γνωστά ως συστήματα Μίας Εισόδου-Μίας Εξόδου (Μ.Ε.Μ.Ε).

Γίνεται φανερό ότι, ένα σύστημα περιγράφεται από τη σχέση μεταξύ του σήματος εξόδου $y(t)$ και του σήματος εισόδου $x(t)$ του συστήματος αυτού.

Παράδειγμα 2.1.3
Έστω ότι έχουμε το παρακάτω RC κύκλωμα.



Να βρεθεί η σχέση (διαφορική εξίσωση) μεταξύ εισερχόμενου $x(t)$ και εξερχόμενου σήματος $y(t)$ στην περίπτωση:

(α) το $x(t)$ είναι η τάση που εφαρμόζεται στο κύκλωμα και το $y(t)$ η τάση στα άκρα του πυκνωτή, δηλαδή $x(t) = v_s(t)$ και $y(t) = v_c(t)$.

(β) το $x(t)$ είναι η τάση που εφαρμόζεται στο κύκλωμα και το $y(t)$ το ρεύμα που διαρέει τον πυκνωτή, δηλαδή $x(t) = v_s(t)$ και $y(t) = i(t)$.

Λύση

(α) Σύμφωνα με τον *νόμο τάσης του Kirchhoff*, για ένα RC κύκλωμα, το αλγεβρικό άθροισμα των τάσεων είναι ίσο με το μηδέν, έχουμε:

$$-v_s(t) + Ri(i) + v_c(t) = 0 \Rightarrow v_s(t) = Ri(t) + v_c(t) \qquad (1)$$

Αλλά για τον πυκνωτή ισχύει:

$$i(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt}$$

Αντικαθιστώντας το στην εξίσωση (1) και χρησιμοποιώντας το ότι $x(t) = v_s(t)$ και $y(t) = v_c(t)$, έχουμε:

$$RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

ή

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t)$$

(β) Είδαμε ότι:

$$i(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt}$$

Ολοκληρώνοντας την σχέση αυτή ως προς t, έχουμε:

$$\upsilon_c(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)dt = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} y(t)dt$$

Αντικαθιστώντας το στην σχέση και χρησιμοποιώντας το ότι $x(t) = \upsilon_s(t)$ και $y(t) = i(t)$, έχουμε:

$$Ry(t) + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} y(t)dt = x(t)$$

ή

$$y(t) + \frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{t} y(t)dt = \frac{1}{R}x(t)$$

Παραγωγίζοντας την σχέση αυτή ως προς t, έχουμε:

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{R}\frac{dx(t)}{dt}$$

2.2. Είδη συστημάτων

Ανάλογα με τη μορφή της σχέσης μεταξύ εισερχόμενου και εξερχόμενου σήματος, διακρίνουμε τις παρακάτω κατηγορίες συστημάτων.

(A) Συστήματα συνεχούς – διακριτού χρόνου

Εάν τόσο το εισερχόμενο όσο και το εξερχόμενο σήμα είναι συνεχή (αντ. διακριτά) σήματα, τότε το σύστημα καλείται **σύστημα συνεχούς χρόνου** (αντ. **διακριτού**).

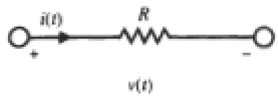
Σ' ένα σύστημα συνεχούς χρόνου, η είσοδος και η έξοδος συνδέονται συνήθως με μιά διαφορική εξίσωση, ενώ σ' ένα σύστημα διακριτού χρόνου με μιά εξίσωση διαφορών.

(B) Συστήματα με μνήμη – συστήματα χωρίς μνήμη

Ορισμός 2.2.1
Ένα σύστημα λέμε ότι έχει **μνήμη** όταν η τιμή $y(t)$ της εξόδου, τη χρονική στιγμή t, εξαρτάται από τις τιμές της εισόδου σε κάποιες προηγούμενες χρονικές στιγμές.

Όταν η τιμή $y(t)$ της εξόδου, τη χρονική στιγμή t, εξαρτάται μόνο από την τιμή της εισόδου $x(t)$ την ίδια χρονική στιγμή t, τότε λέμε ότι το σύστημα **δεν έχει μνήμη**.

Παράδειγμα 2.2.2
Έστω ένα σύστημα αποτελείται από μια (ηλεκτρική) αντίσταση R και στο οποίο θεωρούμε σαν είσοδο $x(t)$ το ρεύμα και σαν έξοδο $y(t)$ την τάση.

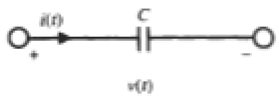


Η σχέση μεταξύ εισόδου- εξόδου περιγράφεται από τον νόμο του Ohm:

$$y(t) = R\, x(t)\,,$$

Επομένως, το σύστημα δεν έχει μνήμη.

Παράδειγμα 2.2.3
Έστω ένα σύστημα αποτελείται από έναν πυκνωτή C και στο οποίο θεωρούμε σαν είσοδο $x(t)$ το ρεύμα και σαν έξοδο $y(t)$ την τάση.



Η σχέση μεταξύ εισόδου- εξόδου περιγράφεται από την σχέση:

$$y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

Επομένως, το σύστημα έχει μνήμη.

Παράδειγμα 2.2.4
Ένα σύστημα περιγράφεται από τη σχέση εισόδου – εξόδου:

$$y(t) = x(t-2) + 7x(t-4)$$

Η τιμή $y(t)$ της εξόδου μια χ.σ. t εξαρτάται από τις τιμές $x(t-2)$, $x(t-4)$ της εισόδου τις προηγούμενες χρονικές στιγμές t-2, t-4 αντίστοιχα. Άρα το σύστημα αυτό έχει μνήμη.

Παράδειγμα 2.2.5
Η σχέση εισόδου – εξόδου ενός συστήματος είναι $y(t) = [cost]^3$

Το σύστημα δεν έχει μνήμη αφού, η τιμή $y(t)$ της εξόδου τη χ.σ. t εξαρτάται μόνον από την τιμή $x(t)$ την ίδια χρονική στιγμή t.

(Γ) Αιτιατά – μη αιτιατά συστήματα

Ορισμός 2.2.6
Ένα σύστημα ονομάζεται **αιτιατό** όταν, η τιμή $y(t)$ της εξόδου μία οποιαδήποτε χρονική στιγμή t εξαρτάται από τις τιμές της εισόδου $x(t)$ την χρονική στιγμή t και /ή προγενέστερες της χ.σ. t (και όχι μεταγενέστερες της χρονικής στιγμής t). Επομένως, σ' ένα αιτιατό σύστημα δεν είναι δυνατόν να πάρουμε ένα εξερχόμενο σήμα, πριν το σύστημα δεχθεί ένα εισερχόμενο σήμα.

Παράδειγμα 2.2.7
Η σχέση εισόδου – εξόδου ενός συστήματος είναι: $y(t) = 5x(t-3) + 3x(t)$.

Το σύστημα είναι αιτιατό, αφού η τιμή $y(t)$ της εξόδου τη χρονική στιγμή t εξαρτάται από την τιμή $x(t)$ της εισόδου τη χρονική στιγμή t και την τιμή $x(t-3)$ της εισόδου την προγενέστερη χρονική στιγμή t-3.

Παράδειγμα 2.2.8
Η σχέση εισόδου – εξόδου ενός συστήματος είναι: $y(t) = x(t+4) + 6x(t-2)$.

Το σύστημα είναι μη αιτιατό αφού, η τιμή $y(t)$ της εξόδου μία χρονική t εξαρτάται και από την τιμή της εισόδου τη χρονική στιγμή t+4, που είναι μεταγενέστερη της χρονική στιγμής t.

Παρατήρηση 2.2.9
Εάν ένα σύστημα δεν έχει μνήμη τότε είναι αιτιατό.

(Δ) Γραμμικά συστήματα – Μη γραμμικά συστήματα

Έστω ότι ένα σύστημα T δίνει έξοδο $y_1(t)$ για είσοδο $x_1(t)$ και έξοδο $y_2(t)$ για είσοδο $x_2(t)$

Ορισμός 2.2.10
Το σύστημα είναι **γραμμικό** όταν ισχύουν τα εξής:

(I) για είσοδο $x_1(t) + x_2(t)$ το σύστημα δίνει έξοδο το άθροισμα $y_1(t) + y_2(t)$.

(II) για είσοδο $kx_1(t)$, όπου k είναι πραγματικός αριθμός, το σύστημα δίνει έξοδο $ky_1(t)$.

Παρατήρηση 2.2.11

(I) Ένα σύστημα λοιπόν είναι γραμμικό, αν ο τελεστής T (μετασχηματισμός) είναι μια γραμμική συνάρτηση.

(II) Σ' ένα γραμμικό σύστημα, εάν η είσοδος είναι μηδενική, τότε και η έξοδος του είναι επίσης μηδενική. Πράγματι για $k = 0$ έχουμε είσοδο $kx_1(t) = 0$ και έξοδο $ky_1(t) = 0$ (λόγω του (II)).

Παράδειγμα 2.2.12

Ένα σύστημα περιγράφεται από την σχέση εισόδου – εξόδου: $y(t) = 4x(t)$ (1)

Για είσοδο $x_1(t)$ το σύστημα δίνει έξοδο $y_1(t) = 4x_1(t)$, ενώ για είσοδο $x_2(t)$ το σύστημα δίνει έξοδο $y_2(t) = 4x_2(t)$.

(I) για είσοδο $x_1(t) + x_2(t)$, σύμφωνα με τη σχέση (1), η έξοδος του συστήματος είναι $y(t) = 4\big(x_1(t) + x_2(t)\big) = 4x_1(t) + 4x_2(t)$ δηλαδή, $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$.

(II) για είσοδο $kx_1(t)$, λόγω της σχέσης (1), προκύπτει έξοδος
$y(t) = 4kx_1(t) = k\big(4x_1(t)\big) = ky_1(t)$. Δηλαδή $y(t) = ky_1(t)$.

Επομένως, το σύστημα είναι γραμμικό.

Παράδειγμα 2.2.13

Ένα σύστημα περιγράφεται από τη σχέση εισόδου – εξόδου $y(t) = e^{x(t)}$ (2)

Για είσοδο $x_1(t)$ έχουμε έξοδο $y_1(t) = e^{x_1(t)}$ και για είσοδο $x_2(t)$ έχουμε έξοδο $y_2(t) = e^{x_2(t)}$. Για είσοδο $x_1(t) + x_2(t)$ η σχέση (2) δίνει $y(t) = e^{x_1(t)+x_2(t)}$. Άρα είναι $y(t) \neq y_1(t) + y_2(t)$.

Επομένως, το σύστημα αυτό δεν μπορεί να είναι γραμμικό (δεν ικανοποιείται η συνθήκη (I)).

(Ε) Χρονικά αμετάβλητα – Χρονικά μεταβλητά συστήματα

Έστω ένα σύστημα με είσοδο $x(t)$ και έξοδο $y(t)$.

Ορισμός 2.2.14

Το σύστημα καλείται **χρονικά αμετάβλητο** όταν για είσοδο $x(t - t_0)$ προκύπτει έξοδος ίση με $y(t - t_0)$, δηλαδή μ' άλλα λόγια για μία χρονική καθυστέρηση της εισόδου προκύπτει ίση χρονική καθυστέρηση της εξόδου.

Παράδειγμα 2.2.15

Ένα σύστημα περιγράφεται από τη σχέση εισόδου – εξόδου: $y(t) = ae^{-b\,x(t)}$ (3)

Το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο αφού για είσοδο $x(t-t_0)$ έχουμε, από την σχέση (3), εάν θέσουμε όπου $x(t)$ το $x(t-t_0)$, έξοδο $ae^{-bx(t-t_0)} = y(t-t_0)$.

Παράδειγμα 2.2.16

Η σχέση εισόδου – εξόδου ενός συστήματος είναι: $y(t) = t^3 x(t)$ (4)

Για είσοδο $x(t-t_0)$, δηλαδή αν θέσουμε όπου $x(t)$ *το* $x(t-t_0)$, προκύπτει έξοδος $t^3 x(t-t_0)$. Αυτό όμως δεν συμπίπτει με την $y(t-t_0)$ αφού σύμφωνα με τη σχέση (4) είναι $y(t-t_0) = (t-t_0)^3 x(t-t_0)$.

Άρα το σύστημα αυτό είναι χρονικά μεταβλητό.

Παράδειγμα 2.2.17

Να εξετασθεί αν το σύστημα $y(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$. είναι:

(α) χρονικά αμετάβλητο,
(β) αιτιατό,
(γ) σύστημα με μνήμη,
(δ) γραμμικό.

Λύση

(α) Για είσοδο $x(t-t_0)$ έχουμε έξοδο $y(t) = \int_0^t x(\tau - t_0)d\tau$ (1). Με αλλαγή μεταβλητής $u = \tau - t_0$ στο ολοκλήρωμα παίρνουμε $y_0(t) = \int_{-t_0}^{t-t_0} x(u)du$ (2)

Ακόμα, $y(t-t_0) = \int_0^{t-t_0} x(\tau)d\tau$ (3)

Από τις σχέσεις (2),(3) προκύπτει ότι είναι $y_0(t) \neq y(t-t_0)$. Άρα το σύστημα είναι χρονικά μεταβλητό.

(β) Το σύστημα αυτό είναι αιτιατό, αφού $y(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$, δηλαδή η έξοδος τη χρονική στιγμή t δεν εξαρτάται από τις τιμές της εισόδου για μεταγενέστερες χρονικές στιγμές.

(γ) Το σύστημα αυτό έχει μνήμη αφού, η έξοδος, μια ορισμένη χρονική στιγμή t, όπως φαίνεται από τον τύπο $y(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$ εξαρτάται από τις τιμές της εισόδου για κάποιες προηγούμενες χρονικές στιγμές.

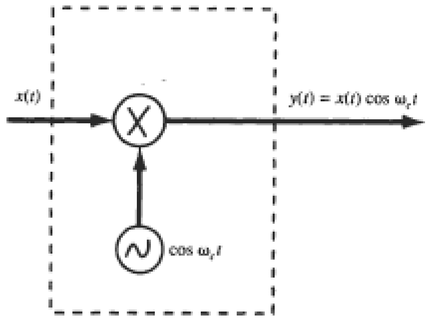
(δ) Για εισόδους $x_1(t), x_2(t)$ έχουμε αντίστοιχα εξόδους $y_1(t) = \int_0^t x_1(\tau)\, d\tau$ και $y_2(t) = \int_0^t x_2(\tau) d\tau$. Για είσοδο $x_1(t) + x_2(t)$ έχουμε $y(t) = \int_0^t \big(x_1(\tau) + x_2(\tau)\big) d\tau$. Άρα, $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$.

Για είσοδο $ax_1(t)$ έχουμε έξοδο:
$y(t) = \int_0^t a x_1(\tau) d\tau = a \int_0^t x_1(\tau) d\tau \Rightarrow y(t) = a y_1(t)$.

Επονμένως, το σύστημα είναι γραμμικό.

Παράδειγμα 2.2.18

Δίνεται το σύστημα του παρακάτω σχήματος (πολλαπλασιαστής).



Να εξετασθεί αν το εν λόγω σύστημα είναι:

(α) σύστημα με μνήμη,
(β) αιτιατό,
(γ) χρονικά αμετάβλητο,
(δ) γραμμικό,

Λύση

Είναι φανερό ότι η σχέση εισόδου-εξόδου του συστήματος περιγράφεται από την:

$$y(t) = T\big(x(t)\big) = x(t)\, cos\omega_0 t$$

(α) Το σύστημα δεν έχει μνήμη αφού, η τιμή της εξόδου $y(t)$ εξαρτάται από τις παρούσες μόνον τιμές της τιμές της εισόδου $x(t)$.

(β) Επειδή η τιμή της εξόδου $y(t)$ δεν εξαρτάται από μελλοντικές τιμές της τιμές της εισόδου $x(t)$, το σύστημα είναι αιτιατό.

(γ) Έστω $x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$ και $y_1(t) = T\big(x_1(t)\big), y_2(t) = T\big(x_2(t)\big)$. Τότε έχουμε:

$$y(t) = T\big(x(t)\big) = T\big(\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)\big) = \big(\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)\big)\, cos\omega_0 t$$

$$= \alpha_1 x_1(t)\, cos\omega_0 t + \alpha_2 x_2(t)\, cos\omega_0 t$$

$$= \alpha_1 y_1(t) \ + \alpha_2 y_2(t)$$

Δηλαδή το σύστημα είναι γραμμικό.

(δ) Εάν $x_1(t) = x(t - t_0)$ και $y_1(t) = T\big(x_1(t)\big)$. Τότε:

$$y_1(t) = T\big(x_1(t)\big) = x(t - t_0)\, cos\omega_0 t$$

Αλλά:

$$y(t - t_0) = x(t - t_0)\, cos\omega_0 (t - t_0) \neq y_1(t)$$

Δηλαδή το σύστημα είναι χρονικά μεταβλητό.

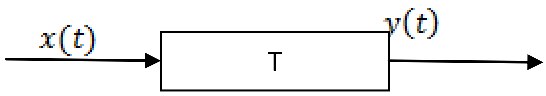
Παρατήρηση 2.2.19

Τα συστήματα των παραδειγμάτων 2.2.2, 2.2.3 είναι εύκολο να δει κανείς ότι είναι γραμμικά.

2.3 Γραμμικά χρονικά αμετάβλητα συστήματα (Γ.Χ.Α)

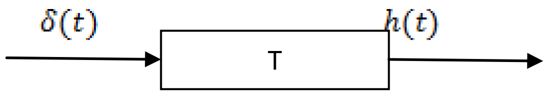
Δυό από τις σπουδαιότερες ιδιότητες ενός συστήματος είναι η γραμμικότητα και η χρονική μη-μεταβλητότητα. Τα συστήματα αυτά ονομάζονται **γραμμικά χρονικά αμετάβλητα Γ.Χ.Α.** (**Linear Time Invariant**) ή **LTI** συντομότερα. Περιγράφουμε παρακάτω την σχέση εισόδου εξόδου ενός τέτοιου συστήματος, χρησιμοποιώντας την συνέλιξη.

Θεωρούμε λοιπόν το σύστημα του σχήματος.



Ορισμός 2.3.1

Αν το σήμα εισόδου είναι η μοναδιαία ώθηση $\delta(t)$, τότε η έξοδος $h(t)$ καλείται **κρουστική απόκριση** του συστήματος.



δηλαδή:

$$h(t) = T\big(\delta(t)\big)$$

Πρόταση 2.3.2

Έστω ότι έχουμε ένα **γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα** το οποίο έχει κρουστική απόκριση $h(t)$. Αν $x(t)$ είναι μια οποιαδήποτε είσοδος στο σύστημα τότε η έξοδος του δίνεται από τη σχέση:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau.$$

Απόδειξη

Η είσοδός $x(t)$ ενός συστήματος είναι γνωστό ότι είναι ίση με:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

Επειδή το σύστημα είναι γραμμικό, έχουμε:

$$y(t) = T\big(x(t)\big) = T\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)T(\delta(t-\tau))d\tau$$

Αλλά το σύτημα είναι χρονικά αμετάβλητο, οπότε: $T\big(\delta(t-\tau)\big) = h(t-\tau)$.

Τελικά:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)$$

Γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα

Παρατήρηση 2.3.3

(α) Η πρόταση μας φανερώνει την σπουδαιότητα τόσο της συνέλιξης όσο και της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ ενός συστήματος. Όταν λοιπόν είναι γνωστή η κρουστική απόκριση $h(t)$ ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου συστήματος τότε, χρησιμοποιώντας την βρίσκουμε την απόκριση του συστήματος για οποιαδήποτε είσοδο (διέγερση) $x(t)$.

(β) Ένας δεύτερος τύπος υπολογισμού της εξόδου (εκτός αυτού της πρότασης) σ' ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα είναι ο:

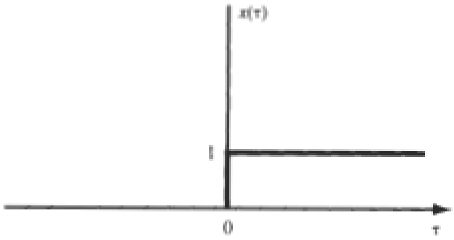
$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

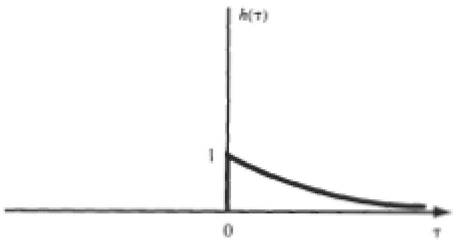
(χρησιμοποιώντας την αντιμεταθετική ιδιότητα της συνέλιξης).

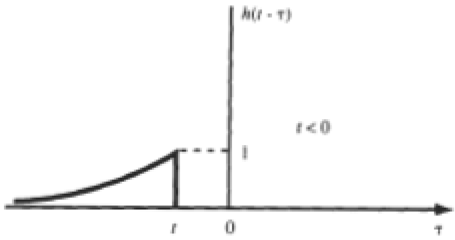
Παράδειγμα 2.3.4

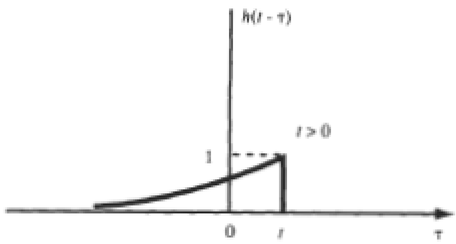
Η είσοδος ενός Γ.Χ.Α. συστήματος $x(t) = u(t)$ ενώ η κρουστική του απόκριση $h(t) = e^{-at}u(t),\ a > 0$. Να υπολογιστεί η έξοδος $y(t)$.

Λύση









Είναι γνωστό ότι:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $x(\tau)$ και $h(t-\tau)$ φαίνονται στα παραπάνω σχήματα για $t > 0$ και $t < 0$.

Παρατηρώντας προσεκτικά τα σχήματα βλέπουμε ότι:

(I) τα σχήματα των $x(\tau)$ και $h(t-\tau)$ δεν επικαλύπτονται για $t < 0$, οπότε $y(t) = 0$ για $t < 0$.

(II) τα σχήματα των $x(\tau)$ και $h(t-\tau)$ επικαλύπτονται για $t < 0$, από το σημείο $\tau = 0$ μέχρι το σημείο $\tau = t$, οπότε:

$$y(t) = \int_0^t e^{-a(t-\tau)} d\tau = e^{-at} \int_0^t e^{a\tau} d\tau = e^{-at} \frac{1}{a} (e^{at} - 1) = \frac{1}{a} (1 - e^{at})$$

Δηλαδή η ζητούμενη έξοδος:

$$y(t) = \frac{1}{a} (1 - e^{at}) u(t)$$

Παρατήρηση 2.3.5

Η έξοδος $y(t)$ θα μπορούσε επίσης να υπολογιστεί από τον τύπο:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau$$

λόγω της αντιμεταθετικής ιδιότητας της συνέλιξης.

Και πάλι, οι γραφικές παρα-στάσεις των συναρτήσεων $h(\tau)$ και $x(t-\tau)$ φαίνονται στα παρακάτω σχήματα για $t > 0$ και $t < 0$.

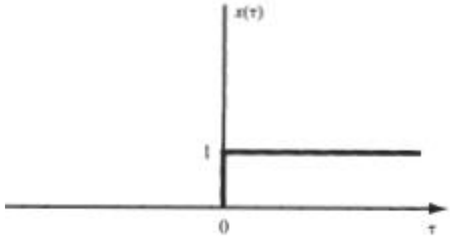
Από τα σχήματα βλέπουμε ότι:

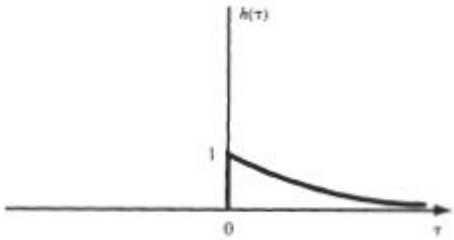
(I) τα σχήματα των $h(\tau)$ και $x(t-\tau)$ δεν επικαλύπτονται για $t < 0$, οπότε $y(t) = 0$ για $t < 0$.

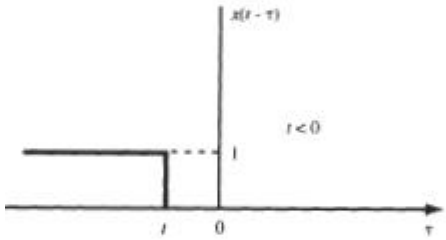
(II) τα σχήματα των $h(\tau)$ και $x(t-\tau)$ επικαλύπτονται για $t < 0$, από το σημείο $\tau = 0$ μέχρι το σημείο $\tau = t$, οπότε:

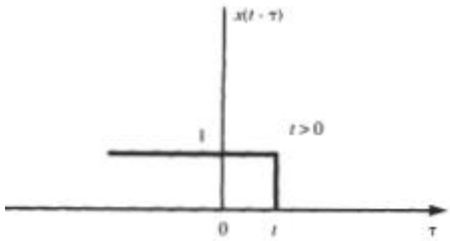
$$y(t) = \int_0^t e^{-a\tau} d\tau = \frac{1}{a} (1 - e^{at})$$

Οπότε και πάλι, η ζητούμενη έξοδος: $y(t) = \frac{1}{a} (1 - e^{at}) u(t)$









Παράδειγμα 2.3.6

Η κρουστική απόκριση ενός Γ.Χ.Α. συστήματος είναι $h(t) = e^{-3t}u(t)$. Να βρεθεί η απόκριση του συστήματος για είσοδο $x(t) = 2\delta(t) - 3\delta(t-1)$.

Λύση

Η απόκριση (έξοδος) του συστήματος είναι $y(t) = x(t) * h(t)$, οπότε:

$$y(t) = \big(2\delta(t) - 3\delta(t-1)\big) * h(t) \Rightarrow y(t) = 2\delta(t) * h(t) - 3\delta(t-1) * h(t) \qquad (1)$$

Αλλά, είναι γνωστό ότι: $\delta(t - t_0) * f(t) = f(t - t_0)$.

Οπότε, έπεται ότι: $\delta(t) * h(t) = h(t)$, $\delta(t-1) * h(t) = h(t-1)$.

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1), έχουμε τελικά:

$$y(t) = 2h(t) * 3h(t-1) \Rightarrow y(t) = 2e^{-3t}u(t) - 3e^{-3(t-1)}u(t-1).$$

Παράδειγμα 2.3.7

Ένα Γ.Χ.Α. σύστημα έχει κρουστική απόκριση $h(t) = e^{-t}u(t)$. Να βρεθεί η έξοδος του συστήματος για είσοδο $x(t) = e^{2t}$.

Λύση

Έχουμε:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\tau} e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\tau}e^{-t}e^{\tau}\, u(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}\, e^{3\tau}u(t-\tau)d\tau$$

$\Rightarrow y(t) = e^{-t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{3\tau}\, u(t-\tau)\, d\tau$ *(* το t σταθερό κατά την ολοκήρωση).

Αλλά, $u(t-\tau) = 0$ για $t-\tau < 0$ δηλαδή για $\tau > t$.

Τελικά, η ζητούμενη έξοδος είναι ίση με:

$$y(t) = e^{-t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{3\tau}\, d\tau = \frac{1}{3}e^{-t}[e^{3\tau}]_{-\infty}^{t} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{3}e^{2t}$$

Παράδειγμα 2.3.8

Ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα έχει κρουστική απόκριση $h(t) = (e^{-t} + \cos t)u(t)$. Να βρεθεί η απόκριση του συστήματος αυτού για είσοδο $x(t) = u(t)$ όπου $u(t)$ είναι η μοναδιαία βηματική είσοδος.

Λύση

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)[e^{-(t-\tau)} + \cos(t-\tau)]u(t-\tau)d\tau$$

Επειδή στη συνέλιξη ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα μπορούμε να γράψουμε πιο απλά:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau.$$

Στο παράδειγμά μας:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-\tau} + \cos\tau)u(\tau)u(t-\tau)\, d\tau \qquad (1)$$

Όμως είναι γνωστό ότι $u(\tau) = 0 \; για \; \tau < 0 \; ενώ \; u(\tau) = 1 \; για \; \tau > 0$. Έτσι η σχέση (1) δίνει:

$$y(t) = \int_0^{\infty} (e^{-\tau} + \cos\tau) u(t-\tau) d\tau.$$

Επειδή το διάστημα ολοκλήρωσης είναι $[0, +\infty)$ είναι $\tau > 0$.

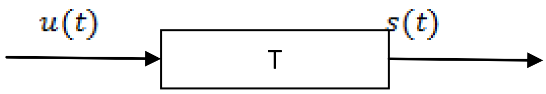
Για $t - \tau < 0$ είναι $u(t-\tau) = 0$. Άρα είναι $y(t) = 0$ για $\tau > t$.

Για $t - \tau > 0$ είναι $u(t-\tau) = 1$. Δηλαδή για $\tau < t$ είναι:

$$y(t) = \int_0^{t} (e^{-\tau} + \cos\tau) d\tau = [-e^{-\tau} + \sin\tau]_0^t \Rightarrow y(t) = 1 - e^{-t} + \sin t.$$

Ορισμός 2.3.9

Αν το σήμα εισόδου είναι η μοναδιαία βηματική είσοδος $u(t)$, τότε η έξοδος $s(t)$ καλείται **μοναδιαία απόκριση** του συστήματος, δηλαδή:



δηλαδή:

$$s(t) = T\big(u(t)\big)$$

Παρατήρηση 2.3.10

Η μοναδιαία απόκριση υπολογίζεται άμεσα από τον τύπο:

$$s(t) = y(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) u(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{t} h(\tau) d\tau$$

Παρατήρηση 2.3.11

Θεωρούμε ένα σύστημα το οποίο επιπλέον είναι και **αιτιατό**. Αποδεικνύεται ότι, ένα τέτοιο σύστημα έχει κρουστική απόκριση $h(t)$ η οποία είναι μηδενική για t<0.

Η έξοδος $y(t)$ για είσοδο $x(t)$ είναι , σ' ένα αιτιατό σύστημα, ίση με:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{0} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau + \int_{0}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau$$

Και επειδή είναι $h(\tau) = 0$ για $\tau < 0$ έχουμε :

$$y(t) = \int_{0}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau.$$

Παράδειγμα 2.3.12

Έστω ένα Γ.Χ.Α. σύστημα του οποίου η σχέση εισόδου-εξόδου δίνεται από την:

$$y(t) = T\big(x(t)\big) = \frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} x(\tau)d\,\tau$$

(α) Να βρεθεί η κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος.

(β) Να εξεταστεί αν το σύστημα είναι αιτιατό.

Λύση

(α) Η

$$y(t) = T\big(x(t)\big) = \frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} x(\tau)d\,\tau = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{t+\frac{T}{2}} x(\tau)d\,\tau - \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{t-\frac{T}{2}} x(\tau)d\,\tau$$

$$= \frac{1}{T}x(t) * u\left(t+\frac{T}{2}\right) - \frac{1}{T}x(t) * u\left(t-\frac{T}{2}\right)$$

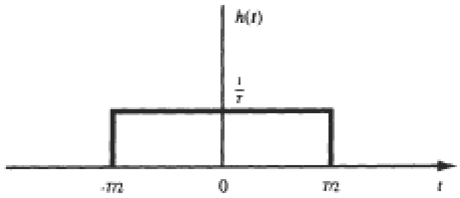
$$= x(t) * \frac{1}{T}\left[u\left(t+\frac{T}{2}\right) - u\left(t-\frac{T}{2}\right)\right]$$

$$= x(t) * h(t)$$

όπου

$$h(t) = \frac{1}{T}\left[u\left(t+\frac{T}{2}\right) - u\left(t-\frac{T}{2}\right)\right] = \begin{cases} \frac{1}{T} & -\frac{T}{2} < t \le \frac{T}{2} \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

(β) Από το παραπάνω σχήμα είναι φανερό ότι απόκριση $h(t) \neq 0$ για t<0. Άρα το σύστημα δεν είναι αιτιατό.



(ΣΤ) Ευσταθή συστήματα

Ορισμός 2.3.13
Ένα σήμα $f(t)$ λέμε ότι είναι **φραγμένο** όταν, για κάθε χρονική στιγμή t για την οποία ορίζεται το σήμα αυτό, ισχύει $|f(t)| \leq B$ όπου B είναι ένας οποιοσδήποτε πραγματικός (πεπερασμένος) θετικός αριθμός.

Έστω τώρα ένα σύστημα με είσοδο $x(t)$ και αντίστοιχη έξοδο $y(t)$. Το σύστημα είναι **ευσταθές** όταν για φραγμένη είσοδο $x(t)$ παίρνουμε φραγμένη έξοδο $y(t)$.

Παρατήρηση 2.3.14
Το είδος αυτό της ευστάθειας, ενός συστήματος είναι γνωστό ως **ευστάθεια BIBO (Bounded Input – Bounded Output)** , δηλαδή φραγμένη είσοδος – φραγμένη έξοδος.

Πρόταση 2.3.15
Ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα είναι ευσταθές, όταν η κρουστική του απόκριση $h(t)$ είναι απολύτως ολοκληρώσιμη, δηλαδή όταν ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < +\infty.$$

Παράδειγμα 2.3.16
Θεωρούμε το σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t) = e^{-t}u(t)$. Να εξεταστεί αν το σύστημα είναι ευσταθές.

Λύση

Έχουμε:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-t}u(t)|dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}u(t)dt = \int_{0}^{\infty} e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^{\infty} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt = 1 < +\infty$$

Δηλαδή η κρουστική απόκριση $h(t)$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη. Άρα το σύστημα αυτό είναι ευσταθές.

Παράδειγμα 2.3.17

Η κρουστική απόκριση $h(t)$ ενός συστήματος είναι $h(t) = u(t)$. Να εξεταστεί αν το σύστημα είναι ευσταθές.

Λύση

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt = \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)dt = \int_{0}^{\infty} 1dt = [t]_0^{\infty} = +\infty$$

Δηλαδή η κρουστική απόκριση $h(t)$ δεν είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη οπότε, το σύστημα αυτό είναι ασταθές.

Παράδειγμα 2.3.18

Να εξεταστεί αν το σύστημα του παραδείγματος 2.2.18 είναι ευσταθές.

Λύση

Έχουμε ότι $|cos\omega_0 t| \leq 1$, οπότε:

$$|y(t)| = |x(t)\; cos\omega_0 t| \leq |x(t)|.$$

Επομένως, εάν η είσοδος εισόδος $x(t)$ είναι φραγμένη, τότε είναι φραγμένη και η έξοδος $y(t)$, δηλαδή το σύστημα είναι (BIBO) ευσταθές.

Παράδειγμα 2.3.19

Ένα αιτιατό σύστημα έχει κρουστική απόκριση $h(t) = te^{-\alpha t}$. Να βρεθούν οι τιμές του α για τις οποίες το σύστημα αυτό είναι ευσταθές.

Παρατήρηση 2.3.20

Σ’ ένα αιτιατό σύστημα είναι $y(t) = 0$ για $t < t_0$ όταν $x(t) = 0$ για $t < t_o$. Οπότε επειδή το σύστημα είναι αιτιατό, είναι $h(t) = 0$ για $t < 0$. Άρα είναι

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{\infty} |te^{-\alpha t}| dt \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt = \int_{0}^{\infty} te^{-\alpha t} dt$$

Αλλά, με παραγοντική ολοκλήρωση:

$$\int te^{-\alpha t} dt = \frac{-te^{-\alpha t}}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\int e^{-\alpha t} dt = \frac{-te^{-\alpha t}}{\alpha} - \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha^2}$$

$$= \frac{-e^{-\alpha t}}{\alpha}\left(t + \frac{1}{\alpha}\right) = -\frac{t+\frac{1}{\alpha}}{\alpha e^{\alpha t}}$$

(I) Για α>0 βρίσκουμε ότι:

$$\int_0^\infty te^{-\alpha t} dt = [-\frac{t+\frac{1}{\alpha}}{\alpha e^{\alpha t}}]_0^\infty = \frac{1}{\alpha^2}$$

(II) Για α<0 το ολοκλήρωμα απειρίζεται.

(III) Για α=0 είναι $\int_0^\infty tdt = +\infty$.

Άρα τελικά το σύστημα είναι ευσταθές για α>0.

2.4. Ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις Γ.Χ.Α. συστημάτων

Έστω T ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα και έστω ότι η είσοδος

$$x(t) = e^{st}$$

Τότε η έξοδος $y(t)$ είναι ίση με:

$$y(t) = T(e^{st}) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau = e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau = H(s)\, e^{st} \quad = \lambda e^{st}$$

Η συνάρτηση e^{st} είναι λοιπόν μιά **ιδιοσυνάρτηση** του Γ.Χ.Α συστήματος με αντίστοιχη **ιδιοτιμή** την:

$$\lambda = H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

Παρατήρηση 2.4.1

(α) Από την παραπάνω σχέση είναι φανερό ότι:

$$H(s) = y(0)$$

(β) Η σπουδαιότητα της συνάρτησης $H(s)$ θα φανεί στα δύο επόμενα κεφάλαια.

Παράδειγμα 2.4.2
Έστω το Γ.Χ.Α. σύστημα του παραδείγατος 2.3.10, δηλαδή το σύστημα του οποίου η σχέση εισόδου-εξόδου δίνεται από την:

$$y(t) = T\big(x(t)\big) = \frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} x(\tau)d\tau$$

Υπολογίστε την ιδιοτιμή του συστήματος που αντιστοιχεί στην ιδιοσυνάρτηση e^{st}.
(α) άμεσα
(β) χρησιμοποιώντας την κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος
Λύση

(α) Εάν $x(t) = e^{st}$, τότε θα πρέπει:

$$y(t) = T(e^{st}) = \frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} e^{s\tau}d\tau = \frac{1}{sT}\left(e^{s\frac{T}{2}} - e^{-s\frac{T}{2}}\right)e^{st} = \lambda e^{st}$$

Οπότε η ιδιοτιμή είναι ίση με:

$$\lambda = \frac{1}{sT}\left(e^{s\frac{T}{2}} - e^{-s\frac{T}{2}}\right)$$

(β) Στο παράδειγμα 2.3.10 δείξαμε ότι:

$$h(t) = \frac{1}{T}\left[u\left(t+\frac{T}{2}\right) - u\left(t-\frac{T}{2}\right)\right] = \begin{cases} \frac{1}{T} & -\frac{T}{2} < t \le \frac{T}{2} \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

Επομένως, η ιδιοτιμή λ είναι ίση με:

$$\lambda = H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-s\tau}d\tau = \frac{1}{sT}\left(e^{s\frac{T}{2}} - e^{-s\frac{T}{2}}\right)$$

(Ζ) Αντιστρέπτα συστήματα.

Ένα σύστημα καλείται **αντιστρεπτό**, εάν το σήμα εισόδου μπορεί να καθοριστεί μονοσήμαντα από την γνώση του σήματος εισόδου.

Παραδείγματα αντιστρεπτών σημάτων είναι τα:

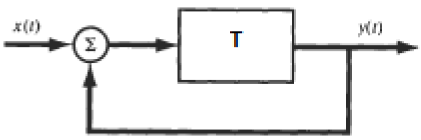
$$y(t) = x^3(t) \text{ και } y(t) = 4x(t-3) + t$$

Το σύστημα $y(t) = x^2(t)$ δεν είναι αντιστρεπτό, αφού τα σήματα εισόδου $x(t) = 1$ και $x(t) = -1$ έχουν την ίδια έξοδο.

Γενικά, είναι αρκετά δύσκολο να δείξει κανείς ότι ένα σύστημα είναι αντιστρεπτό.

(Η) **Ανατροφοδοτούμενα συστήματα.**

Είναι συστήματα στα οποία το εξερχόμενο σήμα, θεωρείται εισερχόμενο και «προστίθεται» στο νέο εισερχόμενο σήμα, όπως φαίνεται στο σχήμα



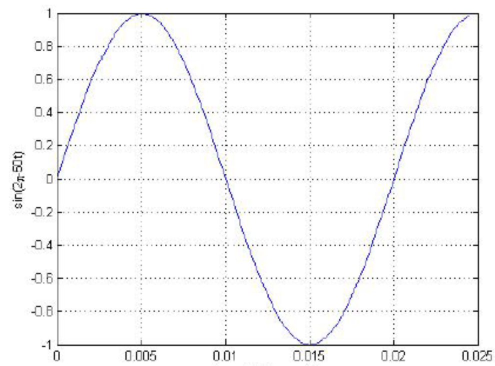
(Θ) **Ντετερμινιστικά και στοχαστικά συστήματα.**

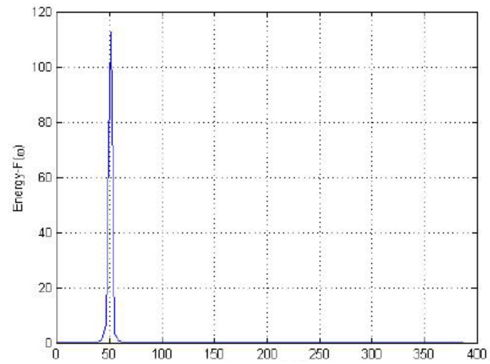
Εάν τόσο το εισερχόμενο όσο και το εξερχόμενο σήμα είναι ντετερμινιστικά, τότε το σύστημα καλείται **ντετερμινιστικό.** Εάν το εισερχόμενο και το εξερχόμενο σήμα είναι **τυχαία,** τότε το σύστημα καλείται **στοχαστικό.**

Κεφάλαιο 3 Μετασχηματισμός Fourier ενός σήματος

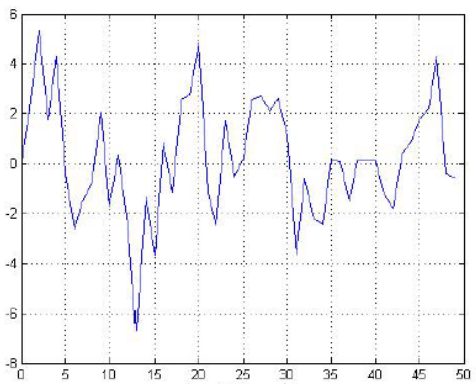
3.1 Μετασχηματισμός Fourier

Πολλές φορές είναι δύσκολο να μελετήσουμε ένα σήμα ή σύστημα όταν αυτά δίνονται σαν συνάρτηση του χρόνου (ορίζονται όπως λέμε στο *πεδίο του χρόνου*). Χρησιμοποιώντας (μαθηματικούς) μετασχηματισμούς τους, μεταφέρουμε τα σήματα σε κάποιο άλλο πεδίο, στο οποίο η μελέτη τους και τυχόν υπολογισμοί είναι αρκετά ευκολότεροι. Ένας τέτοιος μετασχηματισμός είναι και ο λεγόμενος **μετασχηματισμός Fourier**, ο οποίος μετατρέπει τα σήματα από σήματα που ορίζονται στο πεδίο του χρόνου σε σήματα του *πεδίου συχνοτήτων* (δείτε τα δύο παρακάτω σχήματα για το σήμα $x(t) = \sin(2\pi \cdot 50t)$).

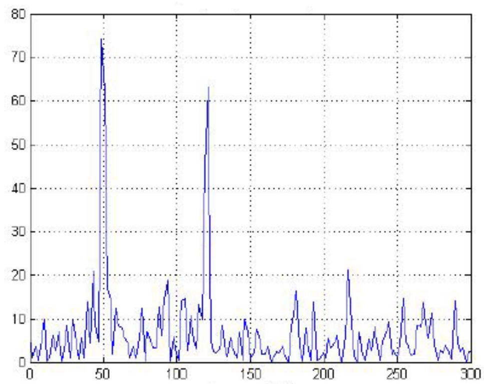




Δηλαδή, ενώ ο αρχικός ορισμός του σήματος μας δείχνει πως αυτό μεταβάλλεται αναφορικά με τον χρόνο, το μετασχηματισμένο σήμα μας φανερώνει σε ποια περιοχή συχνοτήτων ανήκει.



Χρόνος t



συχνότητα (Hz)

Παρατήρηση 3.1.1

Στο παραπάνω σχήμα, η αριστερή εικόνα είναι ένα ηχητικό σήμα που μεταβάλλεται με τον χρόνο. Δεν ξέρουμε όμως τίποτε για το σήμα την στιγμή της καταγραφής του.

Παίρνωντας τον μετασχηματισμό Fourier, ξέρουμε ότι η συχνότητα του ήχου είναι από 50Hz μέχρι 120Hz (ο δε ήχος είναι ανεμεμυγμένος με «θορύβους»).

Με την βοήθεια του μετασχηματισμού μπορούμε να μελετήσουμε καλύτερα, τις περισσότερες φορές, την φύση και τις ιδιότητες σημάτων.

Ορισμός 3.1.2
Ο **μετασχηματισμός Fourier** ενός σήματος $x(t)$ ορίζεται από τη σχέση:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}dt.$$

στην περίπτωση που το ολοκλήρωμα έχει νόημα (συγκλίνει). Ο συνηθισμένος συμβολισμός είναι ο:

$$X(\omega) = F\big(x(t)\big)(\omega)$$

ή απλούστερα:

$$X(\omega) = F\big(x(t)\big).$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα $x(t)$ και $X(\omega)$ αποτελούν ένα *ζευγάρι μετασχηματισμού Fourier* και το συμβολίζουμε συνήθως με:

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

Παρατήρηση 3.1.2
Ο μετασχηματισμός Fourier είναι ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα όπου μεταβλητη ολοκλήρωσης είναι το t, το ω διατηρείται σταθερό κατά την ολοκλήρωση. Το αποτέλεσμα $X(\omega)$, συνήθως, είναι μια μιγαδική συνάρτηση της μεταβλητής ω. Μια ικανή συνθήκη για το ολοκλήρωμα αυτό να συγκλίνει (οπότε ο μετασχηματισμός Fourier έχει νόημα) είναι: εάν το σήμα $x(t)$ είναι μιά τμηματικά συνεχής συνάρτηση σε κάθε πεπερασμένο διάστημα και απόλυτα ολοκληρώσημη , δηλαδή:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|dt < \infty$$

στον άξονα των x, ο μετασχηματισμός Fourier της $x(t)$ έχει νόημα.

Παράδειγμα 3.1.3
Έστω η μοναδιαία ώθηση $\delta(t)$. Ο μετασχηματισμός Fourier της είναι:

$$F(\delta(t)) = \Delta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-i\omega t}dt = 1$$

γιατί, είναι γνωστό ότι, εάν μια συνάρτηση $\varphi(t)$ είναι συνεχής στο σημείο t=0, τότε: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)dt = \varphi(0)$. Θέτοντας $\varphi(t) = e^{-i\omega t}$ (που είναι συνεχής στο t=0) παίρνουμε $\Delta(\omega) = e^{-i\omega 0} = 1 \Rightarrow \Delta(\omega) = 1$.

Παρατήρηση 3.1.4

Ο υπολογισμός του μετασχηματισμού Fourier ενός σήματος είναι τις περισσοτερες φορές διαδικασία δύσκολη, αφού απαιτεί μιγαδική ολοκλήρωση. Πολλές φορές θεωρούμε τον μιγαδικό *i* σαν σταθερά και κάνουμε ολοκλήρωση κατά τα συνηθισμένα (πραγματική).

Παράδειγμα 3.1.5

Έστω $x(t) = e^{-\alpha t}u(t)$, όπου $u(t)$ το μοναδιαίο βηματικό σήμα και α>0.

Για τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Fourier του σήματος αυτού έχουμε:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t}\, u(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{-\alpha t}\, u(t)e^{-i\omega t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}\, u(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$= 0 + \int_{0}^{\infty} e^{-t(\alpha+\omega i)}\, dt = [\frac{e^{-t(\alpha+\omega i)}}{\alpha+\omega i}]_0^\infty = \frac{1}{a+\omega i}$$

Οπότε:

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega) \Leftrightarrow e^{-\alpha t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha+\omega i},$$

Παράδειγμα 3.1.6

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος (ορθογώνιος παλμός) $x(t)$ που ορίζεται από τη σχέση:

$$x(t) = p_a(t) = \begin{cases} 1\,, & |t| < a \\ 0\,, & |t| > a \end{cases}$$

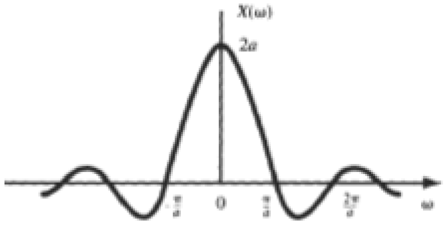
Λύση

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier, έχουμε:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p_a(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-a}^{a} e^{-i\omega t}\, dt = \frac{1}{i\omega}\left(e^{i\omega\alpha} - e^{-i\omega\alpha}\right) = 2\frac{\sin(\omega\alpha)}{\omega}$$

$$= 2\alpha\frac{\sin(\,\omega\alpha)}{\omega\alpha}$$

(επειδή είναι γνωστό ότι:$\sin\omega = \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega} - e^{-i\omega}\right)$). Η γραφική παράσταση του X(ω) φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

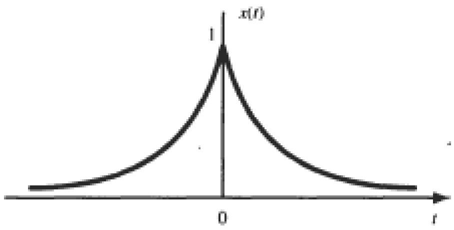


Παράδειγμα 3.1.7

Να υπολογισθεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος: $x(t) = e^{-a|t|}\ \ a > 0$.

Λύση

Η γραφική παράσταση του σήματος φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Το σήμα γράφεται ισοδύναμα:

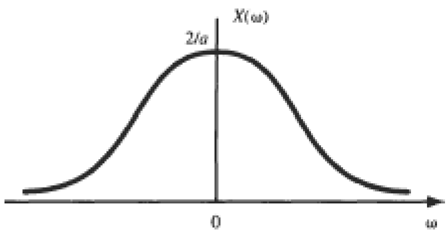
$$x(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t > 0 \\ e^{at}, & t < 0 \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier, έχουμε:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{at}\, e^{-i\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at} e^{-i\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{(a-i\omega)t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(a+i\omega)t}\, dt = \frac{1}{a - i\omega} + \frac{1}{\alpha + i\omega} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

Η γραφική παράσταση του X(ω) φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Ο παρακάτω πίνακας μας δίνει τον μετασχηματισμό Fourier μερικών βασικών σημάτων (οι υπολογισμοί γίνονται με μιγαδική ολοκλήρωση, κατά τρόπο ανάλογο με τα παραπάνω παραδείγματα).

Σήμα	**Μετασχηματισμός Fourier**
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	$e^{-i\omega t_0}$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{i\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$
$\sin(\omega_0 t)$	$-i\pi[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$
$u(t)$	$\pi\delta(\omega)+\frac{1}{i\omega}$
$u(-t)$	$\pi\delta(\omega)-\frac{1}{i\omega}$
$e^{-at}u(t), \quad a>0$	$\frac{1}{i\omega+a}$
$te^{-at}u(t), \quad a>0$	$\frac{1}{(i\omega+a)^2}$
$e^{-a\lvert t\rvert}, \quad a>0$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$
$\frac{1}{a^2+t^2}$	$e^{-a\lvert\omega\rvert}$
$e^{-at^2}, \ a>0$	$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\omega^2/4\alpha}$

Παρατήρηση 3.1.8

Επειδή ο υπολογισμός του μετασηματισμού Fourier ενός σήματος με την βοήθεια του ορισμού είναι, εν γένει, διαδικασία δύσκολη αποφεύγεται. Αντί για τον ορισμό, ο υπολογισμός γίνεται με την βοήθεια:

(I) του πίνακα των μετασχηματισμών Fourier και

(II) των ιδιοτήτων του μετασχηματισμού που περιγράφονται παρακάτω.

3.2 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

Πρόταση 3.2.1
Ο μετασχηματισμός Fourier ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

I) Αν το σήμα $x(t)$ πολλαπλασιαστεί επί μια σταθερά α τότε και ο μετασχηματισμός Fourier $X(\omega)$ του σήματος αυτού πολλαπλασιάζεται επίσης επί α και αντίστροφα.

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega) \Leftrightarrow \alpha x(t) \leftrightarrow \alpha X(\omega)$$

II) Αν τα σήματα $x(t), y(t)$ έχουν μετασχηματισμούς Fourier $X(\omega), Y(\omega)$ αντίστοιχα τότε το άθροισμα $x(t) + y(t)$ έχει μετασχηματισμό Fourier $X(\omega) + Y(\omega)$.

$$\left.\begin{array}{l} x(t) \leftrightarrow X(\omega) \\ y(t) \leftrightarrow Y(\omega) \end{array}\right\} \Leftrightarrow x(t) + y(t) \leftrightarrow X(\omega) + Y(\omega)$$

Οι ιδιότητες I) και II) αναφέρουν ότι ο μετασχηματισμός Fourier ενός σήματος είναι ένας γραμμικός τελεστής.

III) (**χρονική μετατόπιση**) Αν το σήμα $x(t)$ έχει μετασχηματισμό Fourier $X(\omega)$, τότε το μετατοπισμένο $x(t - t_0)$ έχει μετασχηματισμό Fourier $e^{-i\omega t_0}X(\omega)$, δηλαδή:

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega) \Leftrightarrow x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-i\omega t_0}X(\omega)$$

Εφαρμογή
Είδαμε ότι το σήμα $\delta(t)$ (μοναδιαία ώθηση) έχει μετασχηματισμό Fourier το $\Delta(\omega) = 1$. Σύμφωνα με την ιδιότητα αυτή, το σήμα $\delta(t - t_0)$ έχει μετασχηματισμό Fourier $e^{-i\omega t_0}\Delta(\omega) = e^{-i\omega t_0}$.
Άρα έχουμε:

$$\delta(t - t_0) \leftrightarrow e^{-i\omega t_0}$$

IV) (**μετατόπιση συχνότητας**) Αν το σήμα $x(t)$ έχει μετασχηματισμό Fourier $X(\omega)$, τότε το σήμα $e^{i\omega_0 t}x(t)$ έχει μετασχηματισμό Fourier το $X(\omega - \omega_0)$.

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega) \Leftrightarrow e^{i\omega_0 t}x(t) \leftrightarrow X(\omega - \omega_0)$$

V) (**αλλαγή χρονικής κλίμακας**) Αν το σήμα $x(t)$ έχει μετασχηματισμό Fourier $X(\omega)$ και λ είναι μιά πραγματική σταθερά, τότε το σήμα $x(\lambda t)$ έχει μετασχηματισμό Fourier $\frac{X(\omega/\lambda)}{|\lambda|}$.

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega) \Leftrightarrow x(\lambda t) \leftrightarrow \frac{1}{|\lambda|}X(\frac{\omega}{\lambda})$$

VI) (**αντιστροφή χρόνου**) Αν το σήμα $x(t)$ έχει μετασχηματισμό Fourier $X(\omega)$, τότε το σήμα $x(-t)$ έχει μετασχηματισμό Fourier $X(-\omega)$, δηλαδή:

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega) \Leftrightarrow x(-t) \leftrightarrow X(-\omega)$$

VII) (**Δυϊκότητα ή συμμετρία**) Αν το σήμα $x(t)$ έχει μετασχηματισμό Fourier $X(\omega)$, τότε το σήμα $X(t)$ έχει μετασχηματισμό Fourier $2\pi x(-\omega)$.

Αν δηλαδή στο μετασχηματισμό Fourier $X(\omega)$ του σήματος $x(t)$, θέσουμε όπου ω το t προκύπτει το σήμα $X(t)$. Ο μετασχηματισμός Fourier του $X(t)$, προκύπτει αν στο αρχικό σήμα $x(t)$ θέσουμε όπου t το –ω και πολλαπλασιάσουμε επί 2π.

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega) \Leftrightarrow X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$$

VIII) (**παραγώγιση στο πεδίο του χρόνου**) Αν το σήμα $x(t)$ έχει μετασχηματισμό Fourier $X(\omega)$, τότε η πρώτη παράγωγος $x'(t)$ του σήματος (αυτού) ως προς το χρόνο t, έχει μετασχηματισμό Fourier ίσο με $(i\omega)X(\omega)$, δηλαδή:

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega) \Leftrightarrow x'(t) \leftrightarrow (i\omega)X(\omega)$$

Γενικότερα, η ν-οστή παράγωγος $x^{(\nu)}(t)$ έχει μετασχηματισμό Fourier ίσο με:

$$(i\omega)^{\nu}X(\omega).$$

Δηλαδή:

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega) \Leftrightarrow x^{(\nu)}(t) \leftrightarrow (i\omega)^{\nu}X(\omega)$$

IX) (**παραγώγιση στο πεδίο συχνοτήτων**) Αν το σήμα $x(t)$ έχει μετασχηματισμό Fourier $X(\omega)$, τότε το σήμα $tx(t)$ έχει μετασχηματισμό Fourier $iX'(\omega)$.

Γενικότερα, το σήμα $t^n x(t)$ έχει μετασχηματισμό Fourier το $i^n X^{(n)}(\omega)$, δηλαδή:

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega) \Leftrightarrow t^n x(t) \leftrightarrow i^n X^{(n)}(\omega)$$

X) (**ολοκλήρωση στο πεδίο του χρόνου**) Αν το σήμα $x(t)$ έχει μετασχηματισμό Fourier $X(\omega)$, τότε το σήμα $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ έχει μετασχηματισμό Fourier τον $\frac{1}{i\omega}X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$. Δηλαδή:

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{i\omega}X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$

XI) (**συνέλιξη**) Αν το σήμα $x(t)$ έχει μετασχηματισμό Fourier $X(\omega)$ και το $y(t)$ έχει μετασχηματισμό Fourier $Y(\omega)$, τότε η συνέλιξη $x(t) * y(t)$ έχει μετασχηματισμό Fourier το γινόμενο $X(\omega)Y(\omega)$, δηλαδή:

$$\{x(t) \leftrightarrow X(\omega), y(t) \leftrightarrow Y(\omega)\} \Leftrightarrow x(t) * y(t) \leftrightarrow X(\omega)Y(\omega)$$

XII) (**πολλαπλασιασμός**) Αν $X(\omega)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t)$ και $Y(\omega)$ ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $y(t)$, τότε το γινόμενο $x(t) \cdot y(t)$ έχει μετασχηματισμό Fourier ίσο με τη συνέλιξη των $X(\omega), Y(\omega)$ επί $\frac{1}{2\pi}$. Δηλαδή:

$$x(t) \cdot y(t) \leftrightarrow \frac{X(\omega) * Y(\omega)}{2\pi}$$

XIII) (**Parseval**) Ισχύει η σχέση του Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Η σχέση μας αναφέρει ότι, η (κανονικοποιημένη) ενέργεια ενός σήματος υπολογίζεται ολοκληρώνοντας το $|X(\omega)|^2$ ως προς όλα τα ω.

Παράδειγμα 3.2.2

Αν ο μετασχηματισμός Fourier ενός σήματος $x(t)$ είναι:

$$F\{x(t)\} = X(\omega) = \frac{4}{3 + i\omega}$$

να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier καθενός από τα παρακάτω σήματα:

(α) $x(3t)$ (β) $x(3t-6)$ (γ) $e^{i3t}x(t)$

(δ) $x''(t)$ (ε) $tx(t)$ (στ) $x(-t)$

Λύση

(α) Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα V) (αλλαγή χρονικής κλίμακας) του μετασχηματισμού Fourier, έχουμε:

$$F\{x(3t)\} = \frac{1}{3}X\left(\frac{\omega}{3}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3+i\frac{\omega}{3}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{\frac{9+i\omega}{3}} = \frac{4}{9+i\omega}$$

(β) Το $x(3t-6) = x(3(t-2))$. Από το (α) ερώτημα έχουμε: $F\{x(3t)\} = \frac{4}{9+i\omega}$.

Οπότε, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα III**)** (χρονική μετατόπιση) του μετασχηματισμού Fourier, έχουμε:

$$F\{3x(t-2)\} = e^{-i2\omega}\cdot\frac{4}{9+i\omega} = \frac{4e^{-2i\omega}}{9+i\omega}$$

(γ) Από την ιδιότητα IV) (μετατόπιση συχνότητας) του μετασχηματισμού Fourier, έχουμε:

$$F\left\{e^{i3t}x(t)\right\} = X(\omega-3) = \frac{4}{3+i(\omega-3)}$$

(δ) Για τις παραγώγους ενός σήματος χρησιμοποιούμε την ιδιότητα VIII) (παραγώγιση στο πεδίο του χρόνου) του μετασχηματισμού Fourier, οπότε:

$$F\{x''(t)\} = (i\omega)^2X(\omega) = i^2\omega^2X(\omega) = -\frac{4\omega^2}{3+i\omega}$$

(ε) Από την ιδιότητα IX) (παραγώγιση στο πεδίο συχνοτήτων) του μετασχηματισμού Fourier, έχουμε:

$$F\{tx(t)\} = i\frac{dX(\omega)}{d\omega} = i\frac{d(\frac{4}{3+i\omega})}{d\omega} = \frac{4}{(3+i\omega)^2}$$

(στ) Από την ιδιότητα VI) (αντιστροφή χρόνου) του μετασχηματισμού Fourier, έχουμε:

$$F\{x(-t)\} = X(-\omega) = \frac{4}{3-i\omega}$$

Παράδειγμα 3.2.3

Να υπολογισθεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος: $w(t) = \frac{\sin(at)}{\pi t}$

Λύση

Είδαμε στο παράδειγμα 3.1.6 ότι, εάν:

$$x(t) = p_a(t) = \begin{cases} 1\,, & |t| < a \\ 0\,, & |t| > a \end{cases}$$

Τότε:

$$X(\omega) = 2\frac{\sin(\omega\alpha)}{\omega}$$

Αντικαθιστώντας το ω με t έχουμε:

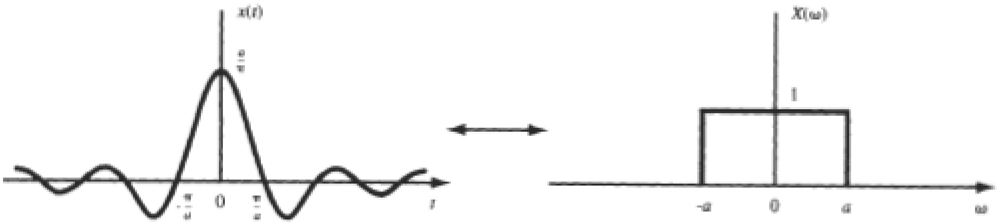
$$X(t) = 2\frac{\sin(\alpha t)}{t}$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα VII) (Δυϊκότητα ή συμμετρία) του μετασχηματισμού Fourier, έχουμε:

$$F\{X(t)\} = 2\pi x(-\omega) \quad \text{δηλαδή} \quad \frac{2\sin(\alpha t)}{t} \leftrightarrow 2\pi p_a(-\omega) = 2\pi p_a(\omega)$$

Διαιρώντας με 2π, έχουμε:

$$w(t) = \frac{\sin(\alpha t)}{\pi t} \leftrightarrow p_a(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \alpha \\ 0, & |\omega| > \alpha \end{cases}$$



Παρατήρηση 3.2.4
(υπολογισμός μετασχηματισμού Fourier για σήματα γραμμικά ανά τμήματα)

(Ι) Εκφράζουμε το $x(t)$ σαν συνάρτηση του μοναδιαίου βηματικού σήματος u(t) έτσι ώστε κάθε παράγοντας να περιέχει μία μόνο ποσότητα που εξαρτάται από το χρόνο.

(ΙΙ) Είναι γνωστό ότι $\frac{du(t-t_0)}{dt} = \delta(t-t_0)$

Παραγωγίζουμε το σήμα $x(t)$ τόσες φορές ώστε να εμφανιστούν παράγοντες οι οποίοι να περιέχουν μόνο τη μοναδιαία ώθηση $\delta(t-t_0)$ ή/και παραγώγους της.

(ΙΙΙ) Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα:

$$F\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = i\omega X(\omega) \;\; \text{ή} \;\; F\{x^{(n)}(t)\} = (i\omega)^n X(\omega)$$

Επειδή:

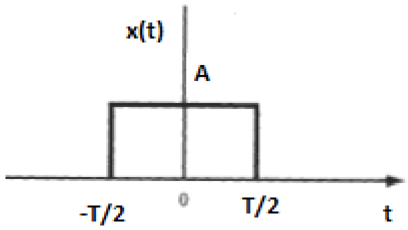
$$\delta(t-t_0) \leftrightarrow e^{-i\omega t_0}.$$

έχουμε:

$$F\left\{\frac{d\delta(t-t_0)}{dt}\right\} = i\omega e^{-i\omega t_0}$$

Παράδειγμα 3.2.5

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t)$ του παρακάτω σχήματος.



Λύση

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι:

$$x(t) = A[u(t + {}^T/_2) - u(t - {}^T/_2)]$$

Τώρα:

$$x'(t) = Au'(t + {}^T/_2) - Au'(t - {}^T/_2) = A\delta(t + {}^T/_2) - A\delta(t - {}^T/_2)$$

Οπότε:

$$F\{x'(t)\} = A\,F\{\delta(t + {}^T/_2)\} - A\,F\{\delta(t - {}^T/_2)\} \Rightarrow$$

$$i\omega X(\omega) = Ae^{i\omega\frac{T}{2}} - Ae^{-i\omega\frac{T}{2}} \Rightarrow$$

$$X(\omega) = \frac{A}{i\omega}(e^{i\omega\frac{T}{2}} - e^{-i\omega\frac{T}{2}}).$$

Είναι γνωστό όμως ότι: Έχουμε ότι: $\sin\omega = \frac{1}{2i}(e^{i\omega} - e^{-i\omega})$.

Άρα:

$$X(\omega) = \frac{A}{i\omega}[\cos\left(\omega\frac{T}{2}\right) + i\sin(\omega\frac{T}{2}) - \cos(\omega\frac{T}{2}) + i\sin\left(\omega\frac{T}{2}\right)] \Rightarrow$$

$$X(\omega) = \frac{2A}{\omega}\sin\left(\omega\frac{T}{2}\right).$$

Παρατήρηση 3.2.6

Εάν το σήμα περιέχει μόνο ημίτονα και συνημίτονα χρησιμοποιούμε τους τύπους:

$$\cos\omega = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega} + e^{-i\omega}\right) \quad \kappa\alpha\iota \quad \sin\omega = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega} - e^{-i\omega}\right)$$

Και την ιδιότητα:

$$F\{e^{i\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

Παράδειγμα 3.2.7

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του $x(t) = \cos(\omega_0\, t)$

Λύση

Έχουμε:

$$x(t) = \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}\right)$$

Επομένως:

$$F\{x(t)\} = \frac{1}{2}F\{e^{i\omega_0 t}\} + \frac{1}{2}F\{e^{-i\omega_0 t}\} = \frac{1}{2}2\pi\delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}2\pi\delta(\omega + \omega_0)$$

$$= \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0).$$

Παράδειγμα 3.2.8 (Parseval)

Έστω το σήμα $x(t)$ με μετασχηματισμό Fourier που δίνεται από την σχέση:

$$X(\omega) = \begin{cases} 1\,, & |\omega| < 1 \\ 0\,, & |\omega| > 1 \end{cases}$$

Θεωρούμε το σήμα: $y(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$.

Να υπολογιστεί η τιμή του ολοκληρώματος:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt$$

Λύση

Αν $Y(\omega)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier του $y(t)$, τότε είναι γνωστό από το θεώρημα Parseval (ιδιότητα XIII) του μετασχηματισμού Fourier) ότι:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |Y(\omega)|^2 d\omega$$

Αλλά, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα VIII) (παραγώγιση στο πεδίο του χρόνου) του μετασχηματισμού Fourier, έχουμε:

$$Y(\omega) = F\{y(t)\} = F\left\{\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right\} = (i\omega)^2 X(\omega) = \begin{cases} -\omega^2\,, & |\omega| < 1 \\ 0\,, & |\omega| > 1 \end{cases}$$

Επομένως:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |Y(\omega)|^2 d\omega = \int_{-1}^{1} \omega^2 d\omega = \frac{2}{3}$$

Τελικά:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |Y(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\frac{2}{3} = \frac{1}{3\pi}$$

3.3 Αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier

Ορισμός 3.3.1

Αν είναι γνωστός ο μετασχηματισμός Fourier $X(\omega)$ ενός σήματος $x(t)$, το σήμα $x(t)$ δίνεται από τη σχέση:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega.$$

Η σχέση αυτή ότι αποτελεί τον **αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier** και γράφουμε συνήθως:

$$F^{-1}\{X(\omega)\} = x(t).$$

Λέμε ότι, το σήμα $x(t)$ και ο μετασχηματισμός Fourier $X(\omega)$ του αποτελούν ένα ζευγάρι μετασχηματισμού Fourier και συμβολίζουμε:

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

με την έννοια ότι:

$$X(\omega) = F\{x(t)\} \Leftrightarrow x(t) = F^{-1}\{X(\omega)\}$$

Ο υπολογισμός του παραπάνω ολοκληρώματος είναι εν γένει δύσκολος.

Παρατήρηση 3.3.2(**υπολογισμός του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier**)

(I) Χρησιμοποιούμε τον πίνακα μετασχηματισμών Fourier.

(II) (α) Αν $X(\omega)$ είναι ρητή συνάρτηση του ω (με βαθμό αριθμητή μικρότερο από το βαθμό του παρανομαστή), γράφουμε τον παρανομαστή σαν γινόμενο παραγόντων της μορφής $a+i\omega$ και αναλύουμε το $X(\omega)$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων. Βρίσκουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier κάθε κλάσματος χρησιμοποιώντας ότι: $F^{-1}\left\{\frac{1}{a+i\omega}\right\} = e^{-at}u(t)\ ,\ a>0.$

Ο μετασχηματισμός Fourier είναι το άθροισμα των αντίστροφων μετασχηματισμών Fourier των απλών κλασμάτων στα οποία αναλύεται η $X(\omega)$.

(β) Η $X(\omega)$ είναι τέτοια ώστε μετά από παραγώγιση ή παραγωγίσεις προκύπτει έκφραση $G(\omega)$ η οποία υπάρχει στον πίνακα των μετασχηματισμών. Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα $F\{t^n x(t)\} = i^n X^n(\omega).$

Παράδειγμα 3.3.3

Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier στις παραπάνω περιπτώσεις.

(α) $2\delta(\omega)$ (β) $8e^{-i2\omega}$ (γ) $\frac{1}{4+i\omega}$ (δ) $\frac{1}{(4+i\omega)^2}$ (ε) $\frac{3}{i\omega}$

Λύση

(α) Είναι γνωστό ότι:

$$F\{1\} = 2\pi\delta(\omega) \Rightarrow F\{\frac{1}{\pi}\} = 2\delta(\omega).$$

Άρα:

$$F^{-1}\{2\delta(\omega)\} = \frac{1}{\pi}$$

(β) Ισχύει ότι: $F\{\delta(t-t_0)\} = e^{-i\omega t_0}.$

Άρα:

$$F^{-1}\left\{e^{-i\omega t_0}\right\} = \delta(t-t_0) \Rightarrow F^{-1}\left\{Ae^{-i\omega t_0}\right\} = A\delta(t-t_0).$$

Οπότε:

$$F^{-1}\left\{8e^{-i\omega 2}\right\} = 8\delta(t-2).$$

(γ) Είναι γνωστό ότι:

$$F\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{a+i\omega}\ ,a>0\ \Rightarrow F^{-1}\left\{\frac{1}{a+i\omega}\right\} = e^{-at}u(t)\ ,a>0.$$

Όποτε για α=4, έχουμε:

$$F^{-1}\left\{\frac{1}{4+i\omega}\right\} = e^{-4t}u(t).$$

(δ) Η

$$\frac{d\left(\frac{1}{4+i\omega}\right)}{d\omega} = -i\frac{1}{(4+i\omega)^2} \qquad (1)$$

Επίσης είναι γνωστή η ιδιότητα:

$$tx(t) \leftrightarrow i\frac{dX(\omega)}{d\omega} \qquad (2)$$

Ακόμα έχουμε ότι:

$$e^{-4t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{4+i\omega} \qquad (3)$$

Από τις (1),(2),(3) παίρνουμε:

$$te^{-4t}u(t) \leftrightarrow i\cdot\left(-i\frac{1}{(4+i\omega)^2}\right) = \frac{1}{(4+i\omega)^2}$$

(ε) Είναι γνωστό ότι:

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \;\; και \;\; u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}$$

Από αυτά συνεπάγεται ότι: $\frac{1}{2} \leftrightarrow \pi\delta(\omega) \;\; και \; -u(t) \leftrightarrow -\pi\delta(\omega) - \frac{1}{i\omega}$

Χρησιμοποιώντας την γραμμικότητα του μετασχηματισμού Fourier, έχουμε:

$$\frac{1}{2} - u(t) \leftrightarrow -\frac{1}{i\omega} \Rightarrow -\frac{1}{2} + u(t) \leftrightarrow \frac{1}{i\omega}$$

$$\Rightarrow 3u(t) - \frac{3}{2} \leftrightarrow \frac{3}{i\omega}$$

Παράδειγμα 3.3.4

Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier για την:

$$X(\omega) = \frac{1}{6+5i\omega-\omega^2}$$

Λύση

Ο παρανομαστής παραγοντοποιείται:

$$6 + 5i\omega - \omega^2 = (2+i\omega)(3+i\omega).$$

οπότε έχουμε:

$$\frac{1}{(2+i\omega)(3+i\omega)} = \frac{A}{2+i\omega} + \frac{B}{3+i\omega} \Rightarrow A(3+i\omega) + B(2+i\omega) = 1 \ \ (1).$$

Από την (1) παίρνουμε:

$$3A + 2B = 1 \ \ \kappa\alpha\iota\ A + B = 0 \Rightarrow A = -B.$$

Επομένως:

$$3A - 2A = 1 \Rightarrow A = 1\ \kappa\alpha\iota\ B = -1.$$

Τελικά:

$$\frac{1}{(2+i\omega)(3+i\omega)} = \frac{1}{2+i\omega} - \frac{1}{3+i\omega} \Rightarrow$$

$$F^{-1}\left\{\frac{1}{(2+i\omega)(3+i\omega)}\right\} = F^{-1}\left\{\frac{1}{2+i\omega}\right\} - F^{-1}\left\{\frac{1}{3+i\omega}\right\} = e^{-2t}u(t) - e^{-3t}u(t).$$

Παράδειγμα 3.3.5

Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της: $X(\omega) = \sin(2\omega)$.

Λύση

Είναι γνωστό ότι:

$$X(\omega) = \sin(2\omega) = \frac{1}{2i}\left(e^{i2\omega} - e^{-i2\omega}\right).$$

Όμως γνωρίζουμε ότι:

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \Rightarrow \frac{1}{2i}\delta(t) \leftrightarrow \frac{1}{2i} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2i}\delta(t-2) \leftrightarrow \frac{1}{2i}e^{-i2\omega} \quad \text{και} \quad \frac{1}{2i}\delta(t+2) \leftrightarrow \frac{1}{2i}e^{i2\omega}$$

Τέλος, έχουμε ότι:

$$F^{-1}\{\sin(2\omega)\} = \frac{1}{2i}[\delta(t+2) - \delta(t-2)]$$

Παρατήρηση 3.3.6

Εάν η συνάρτηση $X(\omega)$ είναι της μορφής:

$$X(\omega) = e^{i\omega\alpha}W(\omega),$$

τότε υπολογίζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier της $W(\omega)$ και έστω ότι αυτός είναι ίσος με $f(t)$, δηλαδή:

$$f(t) = F^{-1}\{W(\omega)\}.$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα III) (χρονική μετατόπιση) του μετασχηματισμού Fourier, έχουμε ότι ο ζητούμενος αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier είναι ίσος με:

$$x(t) = F^{-1}\{X(\omega)\} = F^{-1}\{e^{i\omega a}W(\omega)\} = f(t+a)$$

Παράδειγμα 3.3.7
Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της:

$$X(\omega) = \frac{\sin\omega}{4+i\omega}$$

Λύση
Έχουμε:

$$X(\omega) = \frac{\sin\omega}{4+i\omega} = \frac{1}{2i}e^{i\omega}\frac{1}{4+i\omega} - \frac{1}{2i}e^{-i\omega}\frac{1}{4+i\omega}$$

Αλλά:

$$e^{-4t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{4+i\omega} \Rightarrow e^{-4(t-1)}u(t-1) \leftrightarrow e^{-i\omega}\frac{1}{4+i\omega} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2i}e^{-4(t-1)}u(t-1) \leftrightarrow \frac{1}{2i}e^{-i\omega}\frac{1}{4+i\omega}$$

Άρα:

$$F^{-1}\left\{\frac{\sin\omega}{4+i\omega}\right\} = \frac{1}{2i}\left[e^{-4(t+1)}u(t+1) - e^{-4(t-1)}u(t-1)\right]$$

3.4. Απόκριση συχνότητας

Θεωρούμε ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα. Αν $y(t)$ είναι η έξοδος (απόκριση) του συστήματος αυτού, για είσοδο (διέγερση) $x(t)$, τότε αποδείξαμε ότι:

$$y(t) = x(t) * h(t) \tag{1}$$

όπου $h(t)$ είναι η κρουστική απόκριση του συστήματος αυτού.

Αν πάρουμε τον μετασχηματισμό Fourier των δύο μελών της σχέσης (1), έχουμε:

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) \tag{2}$$

(γιατί είναι γνωστό ότι, ο μετασχηματισμός Fourier της συνέλιξης δύο σημάτων είναι ίσος με το γινόμενο των μετασχηματισμών Fourier των σημάτων αυτών).

Στην σχέση (2), το $Y(\omega)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της απόκρισης $y(t)$, το $X(\omega)$ ο μετασχηματισμός Fourier της διέγερσης $x(t)$ και $H(\omega)$ ο μετασχηματισμός Fourier της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ του συστήματος.

Η συνάρτηση $H(\omega)$ ονομάζεται **απόκριση συχνότητας** του συστήματος. Η απόκριση συχνότητας του συστήματος γράφεται, σύμφωνα με την σχέση (2):

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

Παρατήρηση 3.4.1

Είναι φανερό ότι η κρουστική απόκριση $h(t)$ ενός συστήματος είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της απόκρισης συχνότητας $H(\omega)$ του συστήματος αυτού.

Παράδειγμα 3.4.2

Ένα L.T.I. σύστημα ορίζεται από τη σχέση $y(t) = 4\,x(t - t_0)$. Να βρεθεί:

(α) η απόκριση συχνότητας και

(β) η κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος αυτού

(Ι) άμεσα

(ΙΙ) με χρήση του (α).

Λύση

(α) Θεωρούμε το μετασχηματισμό Fourier των μελών της σχέσης $y(t) = 4\,x(t - t_0)$ και παίρνουμε:

$$Y(\omega) = 4e^{-i\omega t_0}X(\omega) \tag{1}$$

(γιατί, σύμφωνα με τη γνωστή ιδιότητα του μετασχηματισμού Fourier, αν το σήμα $x(t)$ έχει μετασχηματισμό Fourier $X(\omega)$, τότε το σήμα $x(t - t_0)$ έχει μετασχηματισμό Fourier $e^{-i\omega t_0}X(\omega)$. Αλλά, η σχέση (1) είναι ισοδύναμη με την:

$$\frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = 4e^{-i\omega t_0} \Rightarrow H(\omega) = 4e^{-i\omega t_0} \tag{2}$$

όπου $H(\omega)$ είναι η απόκριση συχνότητας του συστήματος.

(β) (I) Από την σχέση $y(t) = 4\, x(t - t_0)$, έχουμε αν $x(t) = \delta(t)$:

$$y(t) = h(t) = 4\, \delta(t - t_0)$$

(II) Είδαμε στο (α) ότι $H(\omega) = 4e^{-i\omega t_0}$ και γνωρίζουμε επίσης ότι $\delta(t - t_0) \leftrightarrow e^{-i\omega t_0}$.

Αλλά η κρουστική απόκριση, που είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της απόκρισης συχνότητας, είναι ίση με:

$$h(t) = F^{-1}\left(4e^{-i\omega t_0}\right) = 4F^{-1}\left(e^{-i\omega t_0}\right) = 4\delta(t - t_0)$$

Παράδειγμα 3.4.3

Η κρουστική απόκριση ενός L.T.I. συστήματος είναι $h(t) = e^{-2t}u(t)$. Να βρεθεί η έξοδος του συστήματος για είσοδο $x(t) = e^{-3t}u(t)$.

Λύση

Αν $y(t)$ είναι η ζητούμενη απόκριση, τότε έχουμε αποδείξει ότι: $y(t) = x(t) * h(t)$ $\alpha\pi'$ όπου, παίρνοντας τον μετασχηματισμό και των δύο μελών της σχέσης έχουμε:

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) \tag{1}$$

Αλλά, είναι γνωστό ότι: $e^{-\alpha t}u(t)\,, \alpha > 0 \leftrightarrow \frac{1}{\alpha + i\omega}$.

Επομένως:

$$H(\omega) = \frac{1}{2 + i\omega} \qquad \text{και} \qquad X(\omega) = \frac{1}{3 + i\omega}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1), παίρνουμε:

$$Y(\omega) = \frac{1}{2 + i\omega} . \frac{1}{3 + i\omega} \Rightarrow Y(\omega) = \frac{1}{(2 + i\omega)(3 + i\omega)}$$

Για την εύρεση του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier $y(t)$, θεωρούμε την ανάλυση σε απλά κλάσματα (δείτε παράδειγμα 3.3.4):

$$Y(\omega) = \frac{1}{(2 + i\omega)(3 + i\omega)} = \frac{1}{2 + i\omega} - \frac{1}{3 + i\omega}$$

Τελικά:

$$y(t) = e^{-2t}u(t) - e^{-3t}u(t) \Rightarrow y(t) = u(t)(e^{-2t} - e^{-3t})$$

Παρατήρηση 3.4.4
Η ζητούμενη απόκριση $y(t)$, θα μπορούσε να υπολογιστεί άμεσα από την:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

υπολογίζοντας δηλαδή (άμεσα) την συνέλιξη:

$$y(t) = e^{-2t}u(t) * e^{-3t}u(t)$$

Παράδειγμα 3.4.5
Αν:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

να βρεθεί:

(α) η κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος

(β) η απόκριση συχνότητας του συστήματος

Λύση

(α) Το σύστημα αυτό είναι γνωστό ως *ολοκληρωτής*. Η κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος αυτού, είναι η έξοδος του $y(t)$ όταν η είσοδος του είναι η μοναδιαία ώθηση $\delta(t)$. Επίσης είναι γνωστό ότι:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau = x(t) * u(t).$$

Άρα:

$$h(t) = u(t) * \delta(t) = u(t).$$

(β) Έχουμε:

$$F\{y(t)\} = F\{x(t) * u(t)\} = F\{x(t)\} \cdot F\{u(t)\} \Rightarrow$$

$$Y(\omega) = X(\omega)F\{u(t)\} \Rightarrow$$

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = F\{u(t)\} = \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega).$$

Παράδειγμα 3.4.6
Ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση:

$$y'(t) + 4y(t) = x(t).$$

Να βρεθεί:

(α) η απόκριση συχνότητας του συστήματος (β) η κρουστική απόκριση του συστήματος

Λύση

(α) Παίρνοντας τον μετασχηματισμό Fourier, καθενός από τα μέλη της διαφορικής εξίσωσης και χρησιμοποιώντας γνωστές ιδιότητες του, έχουμε:

$$(i\omega)Y(\omega) + 4Y(\omega) = X(\omega) \Rightarrow (i\omega + 4)Y(\omega) = X(\omega) \Rightarrow$$

$$\frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{4 + i\omega} = H(\omega).$$

αφού η απόκριση συχνότητας είναι ίση με: $H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$

(β) $h(t) = F^{-1}\{H(\omega)\} = F^{-1}\left\{\frac{1}{4+i\omega}\right\} = e^{-4t}u(t).$

3.5 Απόκριση συστήματος για ημιτονοειδή είσοδο.

Παρατήρηση 3.5.1

Εάν $Z = \alpha + \beta i$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός, τότε είναι γνωστό ότι μπορεί να γραφεί στην λεγόμενη *τριγωνομετρική μορφή*:

$$Z = |Z|(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

όπου φ η γωνία του μιγαδικού αριθμού (συμβολίζεται με $argZ$), που ορίζεται από την σχέση:

$$\tan\varphi = \frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow \varphi = argZ = \tan^{-1}(\frac{\beta}{\alpha})$$

Χρησιμοποιώντας την γνωστή σχέση του Euler:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

έχουμε την λεγόμενη *εκθετική μορφή* του μιγαδικού αριθμού:

$$Z = |Z|e^{i\varphi}.$$

Η γωνία φ είναι πραγματικός αριθμός και ισχύει:

$$\left|e^{i\varphi}\right| = |\cos\varphi + i\sin\varphi| = \sqrt{[\cos\varphi]^2 + [\sin\varphi]^2} = 1$$

Έστω τώρα ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα (L.T.I.) το οποίο έχει απόκριση συχνότητας $H(\omega)$. Η ποσότητα $H(\omega)$ είναι, γενικά, μιγαδική με μέτρο $|H(\omega)|$ και γωνία $\varphi_H(\omega)$.

Επομένως, η $H(\omega)$ γράφεται σε εκθετική μορφή:

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{i\varphi_H(\omega)}$$

Έστω ακόμα ότι, η είσοδος $x(t)$ του συστήματος είναι ημιτονοειδής, δηλαδή έχει τη μορφή:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta)$$

όπου A, ω_0, θ είναι σταθερές (ανεξάρτητες του χρόνου).

Η έξοδος του συστήματος είναι:

$$y(t) = A|H(\omega_0)|\cos(\omega_0 t + \theta + \varphi_H(\omega_0))$$

Πράγματι, το σήμα:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta) = \frac{Ae^{i\theta}}{2}e^{i\omega_0 t} + \frac{Ae^{-i\theta}}{2}e^{-i\omega_0 t}$$

απ΄όπου:

$$X(\omega) = \frac{Ae^{i\theta}}{2}2\pi\delta(\omega-\omega_0) + \frac{Ae^{-i\theta}}{2}2\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

$$= \pi A\, e^{i\theta}\delta(\omega-\omega_0) + \pi A e^{-i\theta}\delta(\omega+\omega_0)$$

Άρα,

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

$$= \pi A\, |H(\omega)|e^{i\varphi_H(\omega)}e^{i\theta}\delta(\omega-\omega_0) + \pi A|H(\omega)|\, e^{i\varphi_H(\omega)}e^{-i\theta}\delta(\omega+\omega_0)$$

Παίρνωντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier του $Y(\omega)$, έχουμε:

$$y(t) = F^{-1}(Y(\omega)) =$$

$$= \pi A\, e^{i\theta}\, F^{-1}(\,|H(\omega)|e^{i\varphi_H(\omega)}\quad \delta(\omega-\omega_0))$$

$$+\pi A\, e^{-i\theta}\, F^{-1}(|H(\omega)|e^{i\varphi_H(\omega)}\quad \delta(\omega+\omega_0))$$

Αλλά με χρήση του ορισμού:

$$F^{-1}(\ |H(\omega)|e^{i\varphi_H(\omega)}\ \ \delta(\omega-\omega_0)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|e^{i\varphi_H(\omega)}\delta(\omega-\omega_0)e^{i\omega t}d\omega$$

$$= \tfrac{1}{2\pi}|H(\omega_0)|e^{i\varphi_H(\omega_0)+i\omega_0 t}$$

Ανάλογα:

$$F^{-1}(\ |H(\omega)|e^{i\varphi_H(\omega)}\ \ \delta(\omega+\omega_0)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|e^{i\varphi_H(\omega)}\delta(\omega+\omega_0)e^{i\omega t}d\omega$$

$$= \tfrac{1}{2\pi}|H(\omega_0)|e^{-i\varphi_H(\omega_0)-i\omega_0 t}$$

Άρα,

$y(t) = F^{-1}(Y(\omega))$=

$$= \pi A\frac{1}{2\pi}|H(\omega_0)|e^{i\varphi_H(\omega_0)+i\omega_0 t}\ e^{i\theta} + \pi A\frac{1}{2\pi}|H(\omega_0)|e^{-i\varphi_H(\omega_0)-i\omega_0 t}\ e^{-i\theta}$$

$$= A|H(\omega_0)|\frac{e^{i\varphi_H(\omega_0)+i\omega_0 t+i\theta}}{2} + A|H(\omega_0)|\frac{e^{-i\varphi_H(\omega_0)-i\omega_0 t-i\theta}}{2}$$

Δηλαδή:

$$y(t) = A|H(\omega_0)|\cos(\omega_0 t + \theta + \varphi_H(\omega_0))$$

Παρατήρηση 3.5.2

Το σήμα εξόδου $y(t)$, προκύπτει από το ημιτονοειδές σήμα εισόδου $x(t)$ με πολλαπλασιασμό του πλάτους του A επί το μέτρο $|H(\omega_0)|$ της απόκρισης συχνότητας $H(\omega)$ για $\omega = \omega_0$ και μετατόπιση της φάσης κατά τη φάση $\varphi_H(\omega_0)$, της απόκρισης συχνότητας για $\omega = \omega_0$.

Όταν το σήμα εισόδου έχει τη μορφή $x(t) = A$ (ειδική περίπτωση ημιτονοειδούς εισόδου για ω=0), το σήμα εξόδου είναι $y(t) = A\,H(0)\ \mathit{όπου}\ A$ σταθερή ποσότητα.

Παράδειγμα 3.5.3

Η απόκριση συχνότητας ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου συστήματος είναι:

$$H(\omega) = \tfrac{4}{4+i\omega}$$

I) Να βρεθεί η έξοδος του συστήματος για είσοδο $x_1(t) = 2\cos t$

II) Να βρεθεί η έξοδος του συστήματος για είσοδο $x_2(t) = 8\cos(4t + 45^0)$

III) Να βρεθεί η έξοδος για είσοδο $x(t) = 2\cos t + 8\cos(4t + 45^0)$.

Λύση

I) Το σήμα $x_1(t) = 2\cos t$ έχει πλάτος $A_1 = 2$, κυκλική συχνότητα $\omega_1 = 1$ και φάση $\theta_1 = 0^0$. Για $\omega = \omega_1 = 1$ έχουμε:

$$H(\omega_1) = H(1) = \frac{4}{4 + i1} \Rightarrow H(1) = \frac{4}{4 + i}$$

Αλλά $4 + i = |4 + i|e^{i\varphi}$ με $\varphi = \tan^{-1}(\frac{\beta}{\alpha}) = \tan^{-1}(\frac{1}{4}) = 14^0$ και

$|4 + i| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17} = 4{,}12$

Άρα $4 + i = 4{,}12e^{i14^0}$, οπότε $H(1) = \frac{4}{4{,}12e^{i14^0}} \Rightarrow H(1) = 0{,}97e^{-i14^0}$ και $|H(1)| = 0{,}97 \; \kappa\alpha\iota \; \varphi_H(1) = -14^0$

Η έξοδος $y_1(t)$ του συστήματος για είσοδο $x_1(t) = 2\cos t$, είναι ίση με:

$y_1(t) = 2H(1)\cos\big(t + \varphi_H(1)\big) = 2 \times 0{,}97\cos(t - 14^0) = 1{,}94\cos(t - 14^0)$

II) Το σήμα $x_2(t) = 8\cos(4t + 45^0)$ έχει πλάτος $A_2 = 8$, κυκλική συχνότητα $\omega_2 = 4$ και φάση $\theta_2 = 45^0$

Για $\omega = \omega_2 = 4$ έχουμε, $H(4) = \frac{4}{4+i4} \Rightarrow H(4) = \frac{1}{1+i}$

Αλλά $1 + i = \sqrt{2}e^{i45^0}$, οπότε $H(4) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i45^0}$. απ΄ όπου έπετει ότ: $|H(4)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ και $\varphi_H(4) = -45^0$

Για είσοδο $x_2(t) = 8\cos(4t + 45^0)$, η έξοδος είναι:

$$y_2(t) = 8|H(4)|\cos(4t + 45^0 - \varphi_H(4)) \Rightarrow$$

$$y_2(t) = 8\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(4t + 45^0 - 45^0) \Rightarrow$$

$$y_2(t) = 4\sqrt{2}\cos(4t)$$

III) Επειδή το σύστημα είναι γραμμικό, εάν η είσοδος είναι:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = 2\cos t + 8\cos(4t + 45^0)$$

η έξοδος θα είναι ίση με:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) \Rightarrow y(t) = 1{,}94\cos(t - 14^0) + 4\sqrt{2}\cos(4t)$$

Κεφάλαιο 4 Μετασχηματισμός Laplace ενός σήματος

Ένα από τα μειονεκτήματα του μετασχηματισμού Fourier, που ορίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, είναι ότι δεν ορίζεται για μια μεγάλη και σπουδαία κατηγορία σημάτων και επίσης μια κατηγορία ασταθών συστημάτων, δηλαδή όταν:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt. = +\infty$$

Ορίζουμε λοιπόν ένα νέο είδος μετασχηματισμού, τον λεγόμενο **μετασχηματισμό Laplace**, ο οποίος θεωρείται ότι είναι μιά επέκταση του μετασχηματισμού Fourier, με την βοήθεια του οποίου μπορούμε ν΄αναλύσουμε μια ευρύτερη κλάση σημάτων και συστημάτων (η οποία περιλαμβάνει και τα ασταθή συστήματα).

4.1 Μετασχηματισμός Laplace

Θεωρούμε το σήμα συνεχούς χρόνου $x(t)$.

Ορισμός 4.1.1
Ο **μετασχηματισμός Laplace** ($X(s) = L(x(t))$ του σήματος $x(t)$ ορίζεται από τη σχέση:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt.$$

στην περίπτωση που το ολοκλήρωμα αυτό έχει νόημα (δηλαδή συγκλίνει). Το γενικευμένο ολοκλήρωμα έχει μεταβλητή ολοκληρώσεως το χρόνο t. Επομένως, το αποτέλεσμα είναι μια συνάρτηση $X(s)$ της μιγαδικής ποσότητας $s = \sigma + i\omega$ (η οποία παραμένει σταθερή κατά την ολοκλήρωση). Ο μετασχηματισμός $X(s)$ μεταφέρει το σήμα $x(t)$ απο το *πεδίο του χρόνου* t στο (μιγαδικό) *πεδίο* s.

Παρατήρηση 4.1.2
(α) Ο μετασχηματισμός Laplace όπως ορίζεται παραπάνω ονομάζεται συνήθως **αμφίπλευρος μετασχηματισμός Laplace** σε αντίθεση με τον **μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace** που ορίζεται από την σχέση:

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}dt.$$

όπου $0^- = lim_{\varepsilon\to 0}(0-\varepsilon)$. Είναι φανερό ότι, οι δύο μετασχηματισμοί είναι ισοδύναμοι όταν $x(t) = 0$ για $t < 0$.

(β) Οι τιμές της ποσότητας s, για τις οποίες υπάρχει (συγκλίνει) το γενικευμένο ολοκλήρωμα, αποτελούν το **πεδίο σύγκλισης** (R.O.C.=region of convergence) του μετασχηματισμού Laplace $X(s)$.

(γ) Η σχέση μεταξύ του μετασχηματισμού Laplace και του μετασχηματισμού Fourier είναι η ακόλουθη:

$$X(s) = L\big(x(t)\big) = X(\sigma + i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-(\sigma+i\omega)t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-\sigma t} e^{-i\omega t} dt = F\big(x(t)e^{-\sigma t}\big)$$

Δηλαδή:

$$L\big(x(t)\big) = F\big(x(t)e^{-\sigma t}\big)$$

(δ) Αν $X(s)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος $x(t)$, τότε συνήθως γράφουμε:

$$x(t) \leftrightarrow X(s)$$

(ε) Ο μετασχηματισμός Laplace $X(s)$ ενός σήματος είναι, συνήθως, μια ρητή συνάρτηση της μεταβλητης s, δηλαδή έχει τη μορφή:

$$X(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = k\frac{(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)}$$

με $P(s), Q(s)$ ακέραια πολυώνυμα της μεταβλητής s. Οι (μιγαδικές) ρίζες $z_1, z_2 \ldots z_m$ του πολυωνύμου $P(s)$ αποτελούν τις **ρίζες** του μετασχημα-τισμού, ενώ οι ρίζες $p_1, p_2, \ldots p_n$ του πολυωνύμου $Q(s)$ είναι οι **πόλοι** του μετασχηματισμού. Οι ρίζες παριστάνονται στο μιγαδικό επίπεδο με το σύμβολο «o» ενώ οι πόλοι με το σύμβολο «x».

Παράδειγμα 4.1.3

Θεωρούμε τη μοναδιαία ώθηση $\delta(t)$. Όπως είναι γνωστό:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 \;, & t \neq 0 \\ \text{απροσδιόριστη} & , t = 0 \end{cases}$$

Το σήμα $\delta(t)$ παρουσιάζει ασυνέχεια για $t = 0$, οπότε ορίζουμε το μετασχημα-τισμό Laplace με κάτω άκρο ολοκλήρωσης το $t = 0^-$ αντί του $t = 0$.

Έχουμε λοιπόν:

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t) e^{-st}\, dt \qquad (1)$$

Αλλά $\delta(t) = 0$ για η $t < 0$, και η σχέση (1) γράφεται:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-st}\, dt \qquad (2)$$

Για συνεχή συνάρτηση $f(t)$ στο σημείο t_0 ισχύει $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) f(t) dt = f(t_0)$. Με $f(t) = e^{-st}\ \kappa\alpha\iota\ t_0 = 0$ παίρνουμε:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^{-s\times 0} = 1 \Rightarrow X(s) = 1.$$

Το αποτέλεσμα αυτό ισχύει για οποιοδήποτε s (δηλαδή R.O.C=C , όπου C το (μιγαδικό) επίπεδο.

Παράδειγμα 4.1.4

Ο μετασχηματισμός Laplace του μοναδιαίου βηματικού σήματος $u(t)$ είναι:

$$X(s) = \int_{0}^{\infty} u(t) e^{-st} dt = \int_{0}^{\infty} 1 \times e^{-st} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-st} dt = [-\frac{e^{-st}}{s}]_0^{\infty}$$

$$\Rightarrow X(s) = -\tfrac{1}{s}(\lim_{t\to+\infty} e^{-st} - 1)$$

Το όριο $\lim_{t\to+\infty} e^{-st}$ υπάρχει μόνο στην περίπτωση που είναι $Re(s) > 0$ και είναι ίσο με 0. Έτσι ο μετασχηματισμός Laplace του μοναδιαίου βηματικού σήματος είναι:

$$X(s) = \frac{1}{s}\ , Re(s) > 0.$$

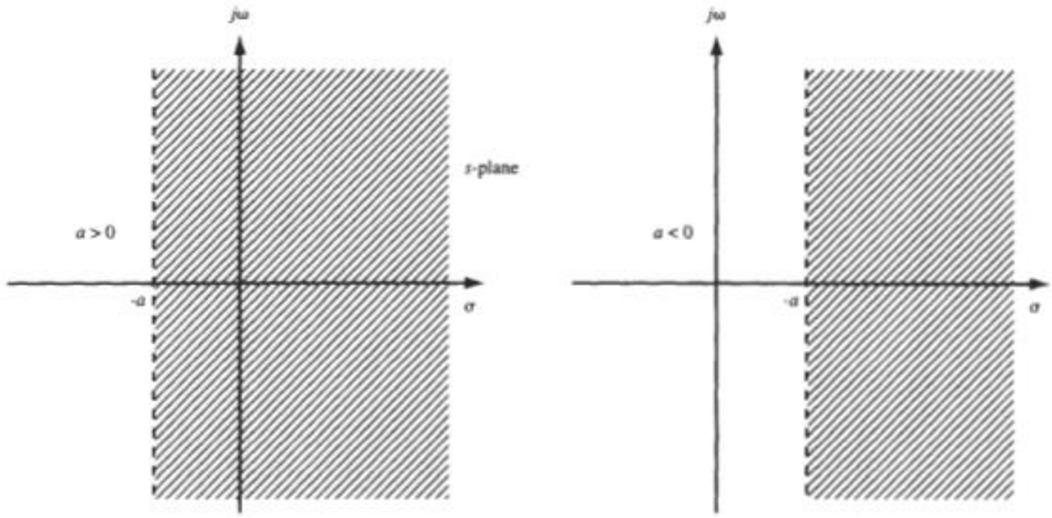
Παράδειγμα 4.1.5

Ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος $x(t) = e^{-at}u(t)$, a πραγματικός, είναι:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} u(t) e^{-st} dt = \int_{0^+}^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = -\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t}\Big|_{0^+}^{\infty} = \frac{1}{s+a},$$

όταν $Re(s) > -a$.

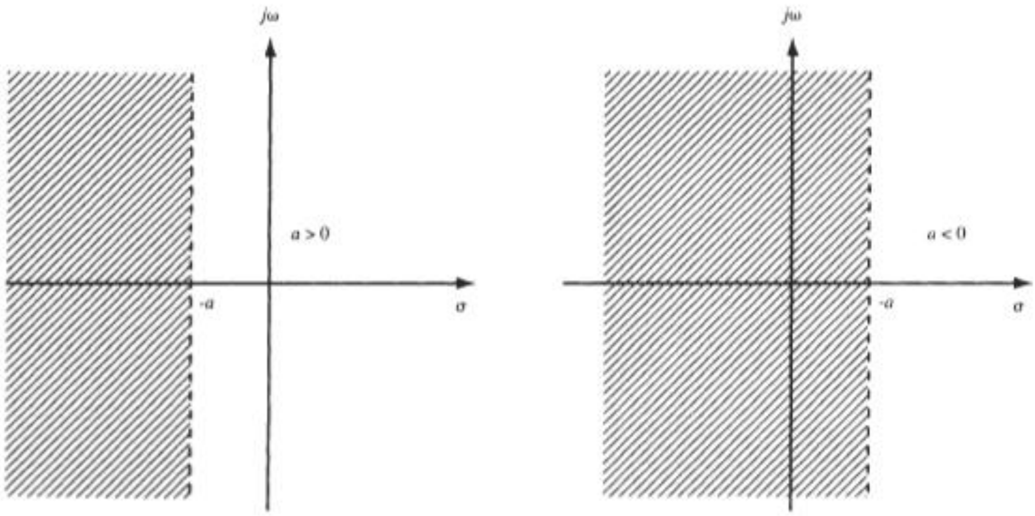
Το πεδίο σύγκλισης του μετασχηματισμού φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Παράδειγμα 4.1.6
Ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος $x(t) = -e^{-at}u(-t)$, όταν a πραγματικός, αποδεικνύεται (ανάλογα) ότι είναι ίσος με:

$$X(s) = \frac{1}{s+a} \text{ όταν } Re(s) < -a.$$

Το πεδίο σύγκλισης του μετασχηματισμού φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Παρατήρηση 4.1.7 (μοναδικότητα του μετασχηματισμού Laplace)
Παρατηρώντας τα δύο τελευταία παραδείγματα βλέπουμε ότι, οι αλγεβρικές εκφράσεις του μετασχηματισμού Laplace δύο διαφορετικών σημάτων είναι ίδιες (εκτός από το πεδίο ορισμού). Για να ορίζεται λοιπόν ο μετασχηματισμός Laplace μονοσήμαντα για κάθε σήμα, το πεδίο ορισμού θα πρέπει να θεωρείται μέρος του μετασχηματισμού.

Ο παρακάτω πίνακας μας δίνει τον μετασχηματισμό Laplace των βασικών σημάτων (οι υπολογισμοί είναι ανάλογοι με αυτούς των παραπάνω παραδειγμάτων).

Σήμα	Μετασχηματισμός Laplace	Πεδίο σύγκλίσης
$\delta(t)$	1	Όλα τα s
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	Re(s)>0
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	Re(s)<0
$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	Re(s)>0
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	Re(s)>-α
$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	Re(s)<-α
$e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s-a}$	Re(s)<α
$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	Re(s)>-α
$-te^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	Re(s)<-α
$\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0{}^2}$	Re(s)>0
$\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0{}^2}$	Re(s)>0
$e^{-at}\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0{}^2}$	Re(s)>-α
$e^{-at}\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0{}^2}$	Re(s)>-α
$\cos^2(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{s^2+2\omega_0{}^2}{(s^2+4\omega_0{}^2)^2}$	Re(s)>0
$\sin^2(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{2\omega_0{}^2}{s(s^2+4\omega_0{}^2)^2}$	Re(s)>0

4.2 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace

Πρόταση 4.2.1

Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες για τον μετασχηματισμό Laplace.

I) (**γραμμικότητα**) $x(t) \leftrightarrow X(s) \Leftrightarrow \alpha x(t) \leftrightarrow \alpha X(s)$

$$\left.\begin{array}{l} x(t) \leftrightarrow X(s) \\ y(t) \leftrightarrow Y(s) \end{array}\right\} \Leftrightarrow x(t) + y(t) \leftrightarrow X(s) + Y(s)$$

Οι ιδιότητες αναφέρουν ότι, ο μετασχηματισμός Laplace είναι ένας γραμμικός τελεστής.

III) (**χρονική μετατόπιση**)

$$x(t) \leftrightarrow X(s) \Leftrightarrow x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-st_0} X(s)$$

IV) (**μετατόπιση στο πεδίο s**)

$$x(t) \leftrightarrow X(s) \Leftrightarrow e^{s_0 t} x(t) \leftrightarrow X(s - s_0)$$

V) (**αλλαγή χρονικής κλίμακας**)

$$x(t) \leftrightarrow X(s) \Leftrightarrow x(\lambda t) \leftrightarrow \frac{1}{|\lambda|} X(\frac{s}{\lambda})$$

VI) (**αντιστροφή χρόνου**)

$$x(t) \leftrightarrow X(s) \Leftrightarrow x(-t) \leftrightarrow X(-s)$$

VII) (**παραγώγιση στο πεδίο του χρόνου**)

$$x(t) \leftrightarrow X(s) \Leftrightarrow x'(t) \leftrightarrow sX(\omega)$$

VIII) (**παραγώγιση στο πεδίο s**)

$$x(t) \leftrightarrow X(s) \Leftrightarrow -t\, x(t) \leftrightarrow X'(s)$$

IX) (**ολοκλήρωση στο πεδίο του χρόνου**)

$$x(t) \leftrightarrow X(s) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s}X(s)$$

X) (**συνέλιξη**)

$$\{x(t) \leftrightarrow X(s), y(t) \leftrightarrow Y(s)\} \Leftrightarrow x(t) * y(t) \leftrightarrow X(s)Y(s)$$

XI) (**περιοδικά σήματα**) Εάν $x(t)$ είναι ένα περιοδικό σήμα με περίοδο T, τότε ο μετασχηματισμός Laplace του είναι ίσος με:

$$X(s) = L\big(x(t)\big) = \frac{X_T(s)}{1 - e^{-sT}}$$

όπου $X_T(s)$ ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος:

$$X_T(t) = \begin{cases} x(t) & 0 \le t < T \\ 0 & t \ge T \end{cases}$$

Παράδειγμα 4.2.2

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace καθενός από τα παρακάτω σήματα.

(α) $x(t) = t^5 u(t)$ (β) $x(t) = cos^2(3t)u(t)$

(γ) $x(t) = sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right)u(t)$ (δ) $x(t) = cost\, u\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$

Να δωθεί το πεδίο σύγκλισης του μετασχηματισμού σε κάθε περίπτωση.

Λύση

(α) Είναι γνωστό ότι: $X(s) = L\big(t^n u(t)\big) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ όταν Re(s)>0. Άρα, για n=5:

$$X(s) = L(t^5 u(t)) = \frac{5!}{s^6} \quad \text{όταν Re(s)>0}$$

(β) Από τον πίνακα μετασχηματισμών, για $\omega_0 = 3$, έχουμε:

$$X(s) = L\left(\cos^2(3t)\, u(t)\right) = \frac{s^2+2\, 3^2}{s(s^2+4\, 3^2)^2} = \frac{s^2+18}{s(s^2+36)^2} \quad \text{όταν Re(s)>0}$$

(γ) Έχουμε: $sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = sint\, cos\frac{\pi}{2} - sin\frac{\pi}{2}\, cost = -cost$. Επομένως:

$$X(s) = L\left(sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)u(t)\right) = L(-cost\,u(t)) = -\frac{s}{s^2+1},$$ όταν Re(s)>0

(δ) Έχουμε:

$$cost\,u\left(t-\frac{\pi}{2}\right) = cos\left[\left(t-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right]u\left(t-\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$\left[cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\,cos\frac{\pi}{2} - sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\,sin\frac{\pi}{2}\right]u\left(t-\frac{\pi}{2}\right) = -sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$$

Αλλά: $L(\sin t\,u(t)) = \frac{1}{s^2+1}$. Επομένως:

$$X(s) = L\left(cost\,u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right) = L\left(-sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -e^{-\frac{s\pi}{2}}\frac{1}{s^2+1},$$ όταν Re(s)>0

Παράδειγμα 4.2.3

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace για καθένα από τα παρακάτω σήματα

(α) $x(t) = e^{-2t}u(t)+e^{-3t}u(t)$

(β) $x(t) = e^{-3t}u(t)+e^{2t}u(-t)$

(γ) $x(t) = e^{2t}u(t)+e^{-3t}u(-t)$

Να δωθούν: (I) οι ρίζες (II) οι πόλοι και (III) το πεδίο σύγκλισης σε κάθε περίπτωση. Να γίνει επίσης η γραφική του παράσταση.

Λύση

(α) Χρησιμοποιώντας τον πίνακα των μετασχηματισμών Laplace, έχουμε:

$$e^{-2t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+2}, \qquad Re(s) > -2$$

$$e^{-3t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+3}, \qquad Re(s) > -3$$

Οπότε:

$$X(s) = \frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+3} = \frac{2\left(s+\frac{5}{2}\right)}{(s+2)(s+3)}, \qquad Re(s) > -2$$

Εδώ: (I) οι ρίζες είναι $s = -\frac{5}{2}$, (II) οι πόλοι είναι s=-2 και s=-3 και (III) το πεδίο σύγκλισης R.O.C.= $Re(s) > -2$. Η γραφική του παράσταση δίνεται στο αριστερό μέρος του παρακάτω σχήματος

(β) Χρησιμοποιώντας τον πίνακα των μετασχηματισμών Laplace, έχουμε:

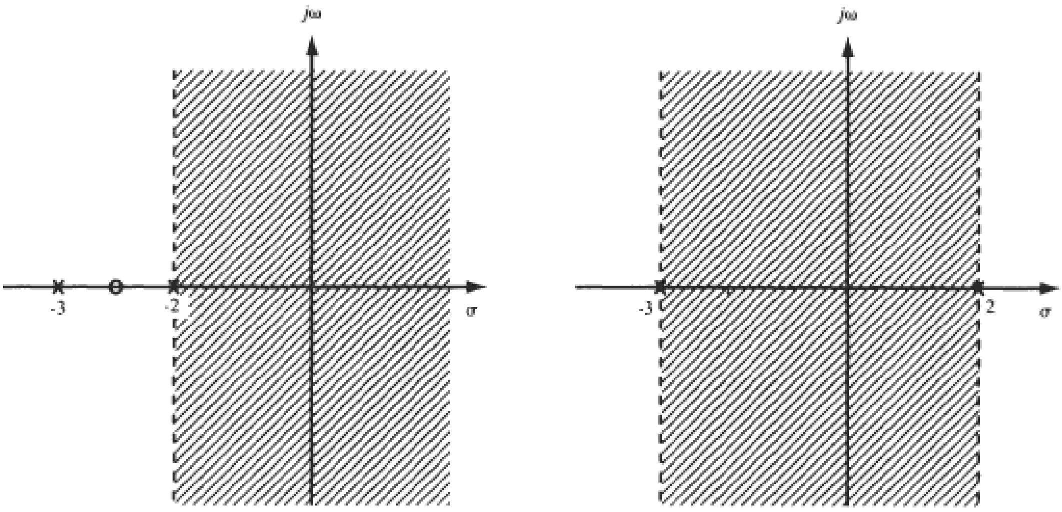
$$e^{-3t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+3}, \qquad Re(s) > -3$$

$$e^{2t}u(-t) \leftrightarrow -\frac{1}{s-2}, \qquad Re(s) < 2$$

Οπότε:

$$X(s) = \frac{1}{s+3} - \frac{1}{s-2} = \frac{-5}{(s-2)(s+3)}, \qquad -3 < Re(s) < 2$$

Εδώ: (I) δεν υπάρχουν ρίζες, (II) οι πόλοι είναι s= 2 και s=-3 και (III) το πεδίο σύγκλισης R.O.C.= $-3 < Re(s) < 2$. Η γραφική του παράσταση δίνεται στο δεξιό μέρος του παρακάτω σχήματος



(γ) Επειδή τα πεδία $Re(s) > 2$ και $Re(s) < -3$ δεν επικαλύπτονται, ο μετασχηματισμός Laplace δεν ορίζεται σ΄αυτή την περίπτωση.

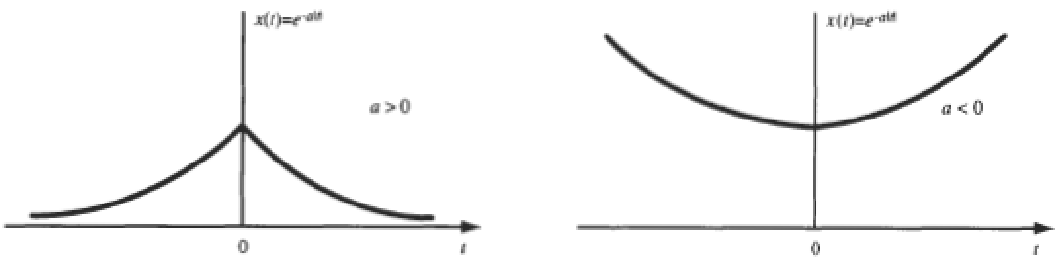
Παράδειγμα 4.2.4

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμών Laplace του σήματος: $x(t) = e^{-\alpha|t|}u(t)$

Να δωθούν: (I) οι ρίζες (II) οι πόλοι και (III) το πεδίο σύγκλισης.

Λύση

Η γραφική παράσταση του σήματος φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, για $\alpha > 0$ και $\alpha < 0$.



Το σήμα που δίνεται μπορεί να γραφεί σαν:

$$x(t) = e^{-\alpha t}u(t) + e^{\alpha t}u(-t)$$

Χρησιμοποιώντας τον πίνακα των μετασχηματισμών Laplace, έχουμε:

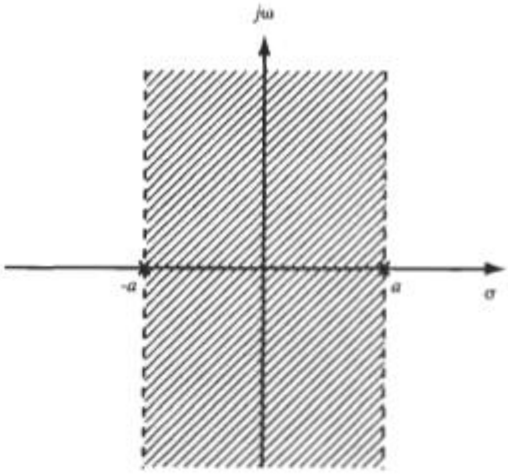
$$e^{-\alpha t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}, \qquad Re(s) > -a$$

$$e^{\alpha t}u(-t) \leftrightarrow -\frac{1}{s-a}, \qquad Re(s) < a$$

Εάν $\alpha > 0$ τα πεδία σύγκλισης επικαλύπτονται, οπότε:

$$X(s) = \frac{1}{s+\alpha} - \frac{1}{s-\alpha} = \frac{-2\alpha}{s^2-\alpha^2}, \qquad -a < Re(s) < a$$

Εδώ: (I) δεν υπάρχουν ρίζες, (II) οι πόλοι είναι s=$-a$ και s= a και (III) το πεδίο σύγκλισης R.O.C.= $-a < Re(s) < a$ (δείτε το παρακάτω σχήμα).



Εάν $\alpha < 0$ τα πεδία σύγκλισης δεν επικαλύπτονται, οπότε ο μετασχηματισμός Laplace δεν ορίζεται σ΄αυτή την περίπτωση.

Παράδειγμα 4.2.5

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace και το αντίστοιχο πεδίο σύγκλισης καθενός από τα παρακάτω σήματα.

(α) $x(t) = \delta(t - t_0)$

(β) $x(t) = u(t - t_0)$

(γ) $x(t) = \delta(at + b)$

(δ) $\sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)$

(ε) $x(t) = e^{-3t}[u(t) - u(t-4)]$

Λύση

(α) Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (III) (χρονική μετατόπιση) του μετασχηματισμού Laplace, έχουμε:

$$\delta(t-t_0) \leftrightarrow e^{-st_0} \quad \text{για όλα τα s}$$

οπότε: R.O.C.= C

(β) Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (ΙΙΙ) (χρονική μετατόπιση) του μετασχηματισμού Laplace, έχουμε:

$$u(t-t_0) \leftrightarrow \frac{1}{s}e^{-st_0} \quad Re(s) > 0$$

(γ) Αν $y(t) = \delta(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}$, τότε:

$$x(t) = \delta(at+b) = \delta\left(a\left(t+\frac{b}{a}\right)\right) = y\left(t+\frac{b}{a}\right) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}e^{s\frac{b}{a}} \qquad \text{για όλα τα s}$$

(δ) Από την γραμμικότητα του μετασχηματισμού Laplace, έχουμε:

$$X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} L\big(\delta(t-kT)\big) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-skT} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-sT}\right)^k = \frac{1}{1-e^{-sT}}, Re(s) > 0$$

(ε) $x(t) = e^{-3t}[u(t) - u(t-4)] = e^{-3t}u(t) - e^{-3t}u(t-4)$

$$= e^{-3t}u(t) - e^{-12}e^{-3(t-4)}u(t-4)$$

Από τον πίνακα των μετασχηματισμών Laplace και την ιδιότητα (ΙΙΙ) (χρονική μετατόπιση) του μετασχηματισμού Laplace, έχουμε:

$$X(s) = \frac{1}{s+3} - e^{-12}e^{-4s}\frac{1}{s+3} \qquad Re(s) > -3$$

Παράδειγμα 4.2.6

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace και το αντίστοιχο πεδίο σύγκλισης καθενός από τα παρακάτω σήματα, χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Laplace του σήματος $u(t)$.

(α) $x(t) = \delta(t)$ (β) $x(t) = \delta'(t)$

(γ) $x(t) = tu(t)$ (δ) $x(t) = e^{-at}u(t)$

(ε) $x(t) = te^{-at}u(t)$ (στ) $x(t) = \cos(\omega_0 t)\ \ u(t)$

(ζ) $x(t) = e^{-at}\cos(\omega_0 t)\ \ u(t)$

Λύση

(α) Είναι γνωστό ότι: $u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s} \quad Re(s) > 0$ και $\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$, οπότε χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (VII) (παραγώγιση στο πεδίο του χρόνου) του μετασχηματισμού Laplace, έχουμε:

$$\delta(t) \leftrightarrow s\frac{1}{s} = 1 \quad \text{για όλα τα s}$$

(β) Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (VII) (παραγώγιση στο πεδίο του χρόνου) του μετασχηματισμού Laplace, έχουμε:

$$\delta'(t) \leftrightarrow s \quad \text{για όλα τα s}$$

(γ) Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (VIII) (παραγώγιση στο πεδίο s) του μετασχηματισμού Laplace, έχουμε:

$$tu(t) \leftrightarrow -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s^2} \qquad Re(s) > 0$$

(δ) Από την ιδιότητα (IV) (μετατόπιση στο πεδίο s) του μετασχηματισμού Laplace, έχουμε:

$$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}, \qquad Re(s) > -a$$

(ε) Από το αποτέλεσμα του (γ) και την ιδιότητα (IV) (μετατόπιση στο πεδίο s) του μετασχηματισμού Laplace:

$$te^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{(s+\alpha)^2} \qquad Re(s) > -a$$

(στ) Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Euler, έχουμε:

$$\cos(\omega_0 t)\, u(t) = \frac{1}{2}e^{i\omega_0 t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-i\omega_0 t}u(t)$$

Οπότε, από την γραμμικότητα του μετασχηματισμού Laplace και την ιδιότητα (IV) (μετατόπιση στο πεδίο s) του μετασχηματισμού Laplace έχουμε:

$$\cos(\omega_0 t)\, u(t) = \frac{1}{2}e^{i\omega_0 t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-i\omega_0 t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{1}{s - i\omega_0} + \frac{1}{2}\frac{1}{s + i\omega_0} = \frac{s}{s^2 + {\omega_0}^2}$$

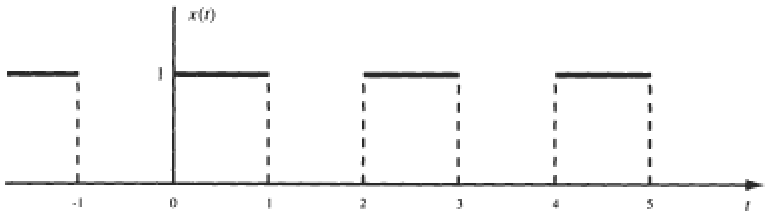
$$Re(s) > 0$$

(ζ) Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (IV) (μετατόπιση στο πεδίο s) του μετασχηματισμού Laplace, έχουμε:

$$e^{-at}\cos(\omega_0 t) \quad u(t) \leftrightarrow \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+{\omega_0}^2}, \qquad Re(s) > -a$$

Παράδειγμα 4.2.7

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace του παρακάτω περιοδικού σήματος.



Λύση

Η περίοδος του σήματος είναι 2 (δηλαδή T=2). Το σήμα:

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & 0 \le t < T \\ 0 & t \ge T \end{cases} = \begin{cases} x(t) & 0 \le t < 1 \\ 0 & t \ge 1 \end{cases}$$

μπορεί να γραφεί σαν:

$$x_T(t) = u(t) - u(t-1)$$

Ο μετασχηματισμός Laplace του $x_T(t)$ είναι ίσος με:

$$X_T(s) = L\big(u(t)\big) - L\big(u(t-1)\big) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-s} = \frac{1-e^{-s}}{s}$$

Τέλος, ο ζητούμενος μετασχηματισμός Laplace είναι ίσος (από την ιδιότητα (XI) μετασχηματισμού Laplace):

$$X(s) = L\big(x(t)\big) = \frac{X_T(s)}{1-e^{-sT}} = \frac{1-e^{-s}}{s(1-e^{-2s})}$$

4.3. Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

'Εστω $X(s)$ ο μετασχηματισμός Laplace ενός σήματος $x(t)$, δηλαδή:

$$L\{x(t)\} = X(s)$$

Το σήμα $x(t)$ μπορεί να προσδιοριστεί πλήρως από τον $X(s)$ και λέμε ότι αποτελεί τον **αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace** του $X(s)$. Συμβολικά:

$$L\{x(t)\} = X(s) \Rightarrow x(t) = L^{-1}\{X(s)\}$$

Παράδειγμα 4.3.1

Έστω ότι έχουμε το σήμα $x(t) = e^{-\alpha t}u(t)$ όπου $u(t)$ το μοναδιαίο βηματικό σήμα και $\alpha > 0$.

Είναι γνωστό ότι ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος είναι: $L\{e^{-\alpha t}u(t)\} = \frac{1}{s+\alpha}$

Για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace του σήματος $x(t)$ έχουμε:

$$L\{x(t)\} = X(s) \Rightarrow x(t) = L^{-1}\{X(s)\}$$

$$\Rightarrow e^{-\alpha t}u(t) = L^{-1}\{\frac{1}{s+\alpha}\}$$

Λέμε λοιπόν ότι, ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της $X(s) = \frac{1}{s+\alpha}$ είναι το σήμα $x(t) = e^{-\alpha t}u(t)$.

Παρατήρηση 4.3.2

Το σήμα $x(t)$ μπορεί να υπολογιστεί με την βοήθεια ενός επικαμπύλιου ολοκληρώματος της μορφής:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} X(s)e^{st}\,ds$$

Ο υπολογισμός του σήματος $x(t)$ (αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της $X(s)$) είναι, εν γένει, διαδικασία δύσκολη αφού απαιτεί γνώσεις μιγαδικής ολοκλήρωσης (οπότε σπάνια χρησιμοποιείται).

Για τον υπολογισμό αυτό διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις.

(α) Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace μπορεί να υπολογιστεί άμεσα με την βοήθεια του πίνακα των μετασχηματισμών Laplace.

(β) Μπορούμε να εκφράσουμε την $X(s)$ σαν άθροισμα:

$$X(s) = X_1(s) + X_2(s) + \cdots + X_n(s)$$

όπου $X_1(s), X_2(s), \ldots, X_n(s)$ συναρτήσεις με γνωστό αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace η κάθε μία $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ αντίστοιχα. Από την γραμμικότητα του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace, ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της $X(s)$ είναι ίσος με:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + \cdots + x_n(t)$$

(γ) Η συνάρτηση $X(s)$ είναι, συνήθως, μια ρητή συνάρτηση της μεταβλητης s, δηλαδή έχει τη μορφή:

$$X(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = k\frac{(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)}$$

Αναλύουμε την $X(s)$ σε απλά κλάσματα καθενός από τα οποία ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace είναι γνωστός. Κατόπιν ακολουθούμε την διαδικασία του (β).

(δ) Εάν η $X(s) = e^{-sc}\, W(s)$, τότε βρίσκουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της $W(s)$ και έστω ότι αυτός είναι $w(t)$. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της $X(s)$, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (ΙΙΙ) (χρονική μετατόπιση) του μετασχηματισμός Laplace, είναι ίσος με:

$$x(t) = w(t-c)$$

Παράδειγμα 4.3.3

Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace κάθε μιάς των συναρτήσεων $X(s)$.

(α) $X(s) = \frac{1}{s+2}, \quad Re(s) > -2$ (β) $X(s) = \frac{1}{s+2}, \quad Re(s) < -2$

(γ) $X(s) = \frac{s}{s^2+9}, \quad Re(s) > 0$ (δ) $X(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2+9}, \quad Re(s) > 0$

Λύση

Χρησιμοποιώντας τον πίνακα των μετασχηματισμών Laplace, έχουμε:

(α) $x(t) = L^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right) = e^{-2t}\, u(t)$ (γιατί: $Re(s) > -2$)

(β) $x(t) = L^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right) = -e^{-2t}\, u(-t)$ (γιατί: $Re(s) < -2$)

(γ) $x(t) = L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+9}\right) = cos3t\ u(t)$

(δ) $x(t) = L^{-1}\left(\frac{s+2}{(s+2)^2+9}\right) = e^{-2t}cos3t\ u(t)$

Παράδειγμα 4.3.4

Να βρεθεί το σήμα $x(t)$, αν είναι γνωστός ο μετασχηματισμός Laplace $X(s)$:

$$X(s) = \frac{2s+1}{s^2+3s+2}$$

όταν: (α) Re(s)>-1 (β) Re(s)<-2 (γ) -2< Re(s)<-1

Λύση

Στην ουσία ζητάμε να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $X(s)$. Η $X(s)$ εδώ είναι ρητή συνάρτηση, οπότε θα την αναλύσουμε σε απλά κλάσματα.

Οι ρίζες του παρανομαστή είναι $s^2+3s+2=0 \Rightarrow s_1=-1, s_2=-2$

Άρα είναι $s^2+3s+2=(s+1)(s+2)$ οπότε έχουμε

$$X(s) = \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} \quad (1)$$

Με απαλοιφή παρανομαστών παίρνουμε $2s+1 = A(s+2)+B(s+1)$

Οπότε βρίσκουμε ότι $A=-1\ \kappa\alpha\iota\ B=3$. Σύμφωνα με τη σχέση (1) παίρνουμε

$$X(s) = \frac{-1}{s+1} + \frac{3}{s+2} \qquad (2)$$

(α) Επειδή το πεδίο σύγκλίσης είναι Re(s)>-1, πρόκειται για δεξιόπλευρο σήμα, οπότε:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-t}u(t)\ ,\quad L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = e^{-2t}u(t)$$

Και λόγω της σχέσης (2) παίρνουμε τελικά:

$$x(t) = -e^{-t}u(t) + 3e^{-2t}u(t)$$

$$\Rightarrow x(t) = (-e^{-t}+3e^{-2t})u(t)$$

(β) Επειδή το πεδίο σύγκλίσης είναι Re(s)<-2, πρόκειται για αριστερόπλευρο σήμα, οπότε:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = -e^{-t}u(-t)\ ,\ \ L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = -e^{-2t}u(-t)$$

Και λόγω της σχέσης (2) παίρνουμε τελικά:

$$x(t) = e^{-t}u(-t) - 3e^{-2t}u(-t)$$

$$\Rightarrow x(t) = (e^{-t} - 3e^{-2t})u(-t)$$

(γ) Επειδή το πεδίο σύγκλίσης είναι -2< Re(s)<-1 , πρόκειται για αμφίπλευρο σήμα, οπότε:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = -e^{-t}u(-t)\ ,\ \ L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = e^{-2t}u(t)$$

Και λόγω της σχέσης (2) παίρνουμε τελικά:

$$x(t) = e^{-t}u(-t) + 3e^{-2t}u(t)$$

Παράδειγμα 4.3.5

Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace κάθε μιάς των συναρτήσεων $X(s)$.

(α) $X(s) = \frac{s+2}{s+3},\ Re(s) > -3$

(β) $X(s) = \frac{s^3+5s^2+7}{s^2+5s+6},\ Re(s) > 0$

Λύση

(α) Έχουμε:

$$X(s) = \frac{s+2}{s+3} = \frac{s+3-1}{s+3} = \frac{s+3}{s+3} - \frac{1}{s+3} = 1 - \frac{1}{s+3},$$

οπότε χρησιμοποιώντας τον πίνακα των μετασχηματισμών Laplace:

$$x(t) = L^{-1}\left(1 - \frac{1}{s+3}\right) = L^{-1}(1) - L^{-1}\left(\frac{1}{s+3}\right) = \delta(t) - e^{-3t}\ u(t)$$

επειδή $Re(s) > -3$ (δεξιόπλευρο σήμα).

(β) Ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος από τον βαθμό του παρονομαστή, οπότε εκτελώντας την διαίρεση των πολυωνύμων έχουμε την ταυτότητα της διαίρεσης:

$$s^3+5s^2+7=(s^2+5s+6)s+(-6s+7)\Rightarrow$$

$$\frac{s^3+5s^2+7}{s^2+5s+6}=s+\frac{-6s+7}{s^2+5s+6}$$

Δηλαδή:

$$X(s)=\frac{s^3+5s^2+7}{s^2+5s+6}=s+\frac{-6s+7}{s^2+5s+6}$$

και με ανάλυση απλών κλασμάτων έχουμε:

$$\frac{-6s+7}{s^2+5s+6}=\frac{-6s+7}{(s+3)(s+2)}=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{s+3}\ \Rightarrow A=19,\ \ B=-25$$

Επομένως:

$$X(s)=s+\frac{19}{s+2}-\frac{25}{s+3}$$

Χρησιμοποιώντας τον πίνακα των μετασχηματισμών Laplace έχουμε (επειδή $Re(s)>0$):

$$x(t)=L^{-1}\left\{s+\frac{19}{s+2}-\frac{25}{s+3}\right\}=L^{-1}\{s\}+19\,L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}-25\,L^{-1}\left\{\frac{25}{s+3}\right\}$$

$$=\delta'(t)+(19e^{-2t}-25e^{-3t})u(t)$$

Παράδειγμα 4.3.6

Να βρεθεί το σήμα (ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace) καθεμιάς των συναρτήσεων $X(s)$.

(α) $X(s)=\frac{se^{-3s}}{s^2+4}$, (β) $X(s)=\frac{e^{-3s}}{s(s+2)^2}$,

Λύση

(α) Έστω ότι $Y(s)=\frac{s}{s^2+4}$, τότε από τον πίνακα των μετασχηματισμών Laplace έχουμε:

$$y(t)=\cos(2t)\,u(t)\leftrightarrow Y(s)=\frac{s}{s^2+4}$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (ΙΙΙ) (χρονική μετατόπιση) του μετασχηματισμού Laplace, έχουμε ότι:

$$y(t-t_0) \leftrightarrow e^{-t_0 s}\, Y(s) = e^{-t_0 s}\frac{s}{s^2+4}$$

Για $t_0 = 3$ έχουμε:

$$y(t-3) \leftrightarrow e^{-3s}\, Y(s) = e^{-3s}\frac{s}{s^2+4} = X(s)$$

Το ζητούμενο σήμα λοιπόν είναι ίσο με:

$$x(t) = y(t-3) = \cos\big(2(t-3)\big)u(t-3)$$

(β) Έστω $Y(s) = \frac{1}{s(s+2)^2}$, τότε με ανάλυση σε απλά κλάσματα έχουμε:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+2)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{\Gamma}{(s+2)^2} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = -\frac{1}{2} \\ \Gamma = \frac{1}{2} \end{cases}$$

δηλαδή:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+2)^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(s+2)^2}$$

Αλλά:

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s},\;\; e^{-2s}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+2}$$

Επίσης:

$$tu(t) \leftrightarrow \frac{1}{s^2} \Rightarrow e^{-2t}tu(t) \leftrightarrow \frac{1}{(s+2)^2}$$

Επομένως:

$$y(t) = \frac{1}{4}u(t) - \frac{1}{2}e^{-2t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-2t}tu(t) \leftrightarrow Y(s)$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (ΙΙΙ) (χρονική μετατόπιση) του μετασχηματισμού Laplace, έχουμε ότι:

$$y(t-3) \leftrightarrow e^{-3s}\, Y(s) = X(s)$$

Το ζητούμενο σήμα λοιπόν είναι ίσο με:

$$x(t) = y(t-3) = \frac{1}{4}u(t-3) - \frac{1}{2}e^{-2(t-3)}u(t-3) + \frac{1}{2}e^{-2(t-3)}(t-3)u(t-3)$$

Παράδειγμα 4.3.7

Με χρήση του μετασχηματισμού Laplace να βρεθεί η συνέλιξη των σημάτων $x(t) = u(t)$ και $y(t) = u(t-4)$.

Λύση

Είναι γνωστό ότι:

$$\{x(t) \leftrightarrow X(s), y(t) \leftrightarrow Y(s)\} \Leftrightarrow x(t) * y(t) \leftrightarrow X(s)Y(s).$$

Αλλά $X(s) = L\big(u(t)\big) = \frac{1}{s}$ και $X(s) = L(u(t-4)) = e^{-4s}\frac{1}{s}$.

Οπότε:

$$X(s)Y(s) = \frac{1}{s}e^{-4s}\frac{1}{s} = e^{-4s}\frac{1}{s^2}.$$

Τώρα, είναι γνωστό ότι:

$$L\big(t^n u(t)\big) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Επομένως $L\big(t\,u(t)\big) = \frac{1}{s^2}$ ή $t\,u(t) = L^{-1}(\frac{1}{s^2})$.

Από αυτό και την παρατήρηση 4.3.2 (δ), έχουμε:

$$x(t) * y(t) = L^{-1}\left(e^{-4s}\frac{1}{s^2}\right) = (t-4)\,u(t-4)$$

4.4. Συνάρτηση μεταφοράς συστήματος

Θεωρούμε ένα συνεχούς-χρόνου γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα με είσοδο $x(t)$ και έξοδο $y(t)$. Τότε είναι γνωστό ότι ισχύει η σχέση:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

όπου $h(t)$ η κρουστική απόκριση του συστήματος.

Παίρνοντας τον μετασχηματισμό Laplace των δύο μελών της παραπάνω σχέσης έχουμε:

$$L\{y(t)\} = L\{x(t) * h(t)\} \Rightarrow$$

$$Y(s) = X(s)H(s)$$

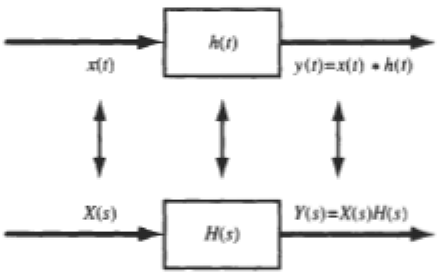
όπου $X(s) = L\{x(t)\}$ ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος εισόδου $x(t)$, $Y(s) = L\{y(t)\}$ ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος εξόδου $y(t)$ και $H(s) = L\{h(t)\}$ ο μετασχηματισμός Laplace της κρουστικής απόκρισης $h(t)$.

Ορισμός 4.4.1

Η συνάρτηση $H(s)$ καλείται **συνάρτηση μεταφοράς** του συστήματος και είναι ίση με:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς χαρακτηρίζει πλήρως ένα L.T.I. σύστημα (αφού είδαμε ότι είναι ο μετασχηματισμός Laplace της κρουστικής απόκρισης $h(t)$, η οποία χαρακτηρίζει πλήρως το σύστημα).



Παρατήρηση 4.4.2

(α) Είναι φανερό ότι η κρουστική απόκριση είναι ίση με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος αυτού. Δηλαδή:

$$L\{h(t)\} = H(s) \Rightarrow h(t) = L^{-1}\{H(s)\}$$

(β) Η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ ενός συστήματος είναι, συνήθως, μια ρητή συνάρτηση της μεταβλητής s, δηλαδή έχει τη μορφή:

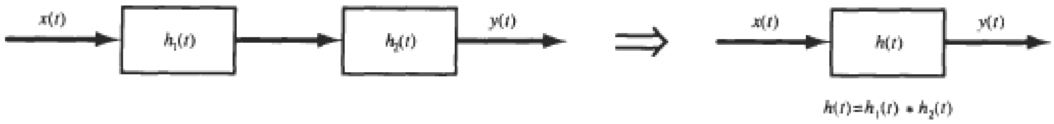
$$H(s) = \frac{A(s)}{\Pi(s)}$$

με $A(s), \Pi(s)$ ακέραια πολυώνυμα της μεταβλητής s. Οι ρίζες του πολυωνύμου $A(s)$ αποτελούν τις ρίζες (τα **μηδενικά**) της συνάρτησης μεταφοράς $H(s)$, ενώ οι ρίζες του πολυωνύμου $\Pi(s)$ είναι οι **πόλοι** της $H(s)$.

(γ) Εάν έχουμε δύο συστήματα L.T.I. με κρουστική απόκριση $h_1(t)$ και $h_2(t)$ αντίστοιχα, τότε για την συνολική κρουστική απόκριση $h(t)$, ενός συστήματος που προκύπτει από τον «συνδυασμό» (με σύνδεση) των δύο αυτών συστημάτων, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

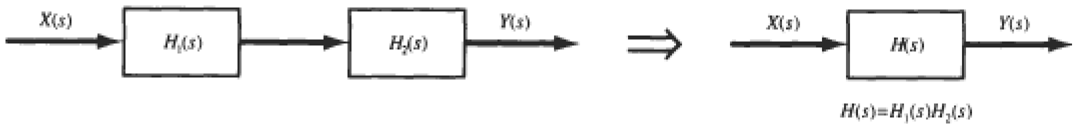
(I) **Σύνδεση σε σειρά**: αν τα συστήματα συνδέονται σε σειρά (όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα), τότε (είναι εύκολο να δειχθεί ότι) η συνολική κρουστική απόκριση του συστήματος $h(t)$ είναι ίση με:

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$$



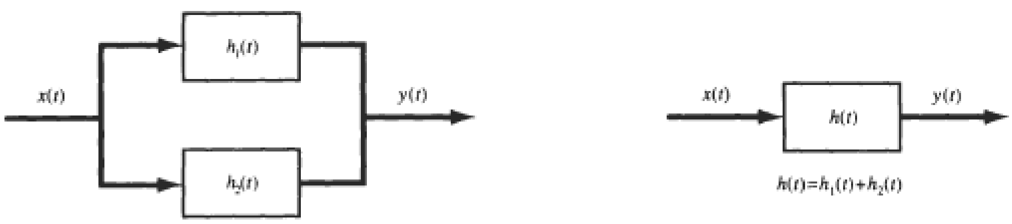
Η αντίστοιχη σχέση μεταξύ των συναρτήσεων μεταφοράς των συστημάτων και της (συνολικής) συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος που προ-κύπτει από την σύνδεση των αρχικών σε σειρά είναι ίση με:

$$H(t) = H_1(t)H_2(t)$$



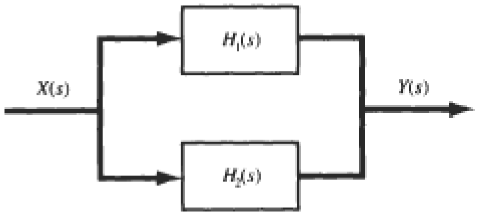
(II) **Σύνδεση παράλληλα**: αν τα συστήματα συνδέονται παράλληλα (όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα), τότε (είναι εύκολο να δειχθεί ότι) η συνολική κρουστική απόκριση του συστήματος $h(t)$ είναι ίση με:

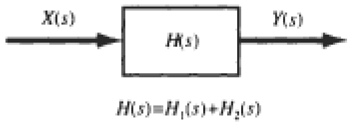
$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$



Η αντίστοιχη σχέση μεταξύ των συναρτήσεων μεταφοράς των συστημάτων και της (συνολικής) συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος που προκύ-πτει από την σύνδεση των αρχικών παράλληλα είναι ίση με:

$$H(t) = H_1(t)+H_2(t)$$





Παράδειγμα 4.4.3

Σ' ένα συνεχούς-χρόνου L.T.I. σύστημα, η κρουστική απόκριση $h(t) = e^{-at}u(t)$. Να βρεθεί η έξοδος του συστήματος για είσοδο $x(t) = e^{at}u(-t)$.

Λύση

Η έξοδος $y(t)$ του συστήματος για είσοδο $x(t)$ είναι γνωστό ότι είναι ίση με:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

Παίρνοντας τον μετασχηματισμό Laplace των δύο μελών της παραπάνω σχέσης έχουμε:

$$Y(s) = X(s)H(s)$$

Από τον πίνακα μετασχηματισμών Laplace, έχουμε:

$X(s) = L\{x(t)\} = L\{e^{\alpha t}u(-t)\} = \frac{1}{s-\alpha}, \quad Re(s) < a$ και

$H(s) = L\{h(t)\} = L\{e^{-\alpha t}u(t)\} = \frac{1}{s+\alpha}, \quad Re(s) > -a.$

Άρα:

$$Y(s) = H(s)X(s) \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s-\alpha} \times \frac{1}{s+\alpha} = \frac{1}{s^2-\alpha^2}, \quad \alpha > Re(s) > -a$$

Η έξοδος $y(t)$, για είσοδο $x(t)$, είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της $Y(s)$. Χρησιμοποιώντας τον πίνακα των μετασχηματισμών Laplace έχουμε:

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-\alpha^2}\right\} = \frac{1}{2\alpha}e^{-|a|t}$$

Παράδειγμα 4.4.4

Δίνεται η συνάρτηση μεταφοράς ενός συστήματος $H(s) = \frac{s+2}{s^3+2s^2+s}$. Να βρεθούν οι ρίζες της, οι πόλοι της καθώς και η έξοδος του συστήματος για είσοδο $x(t) = 4e^{-2t}u(t)$.

Λύση

Οι ρίζες της συνάρτησης μεταφοράς είναι οι ρίζες του αριθμητή. Δηλαδή:

$$s + 2 = 0 \Rightarrow s = -2$$

Άρα η $H(s)$ έχει μιά μοναδική ρίζα, το $s = -2$.

Οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς είναι οι ρίζες του παρανομαστή. Δηλαδή:

$$s^3 + 2s^2 + s = 0 \Rightarrow s(s^2 + 2s + 1) = 0 \Rightarrow s(s+1)^2 = 0$$

Άρα έχουμε τον απλό πόλο $p_1 = 0$ και τον πόλο δεύτερης τάξης $p_2 = p_3 = -1$.

Για είσοδο $x(t) = 4e^{-2t}u(t)$ έχουμε:

$$X(s) = L\{x(t)\} = L\{4e^{-2t}u(t)\} = 4L\{e^{-2t}u(t)\} \Rightarrow X(s) = \frac{4}{s+2}$$

Αν $y(t)$ είναι η έξοδος για την είσοδο αυτή, με $Y(s) = L\{y(t)\}$, τότε έχουμε:

$$Y(s) = H(s)X(s) \Rightarrow Y(s) = \frac{s+2}{s^3 + 2s^2 + s} \times \frac{4}{s+2} \Rightarrow Y(s) = \frac{4}{s^3 + 2s^2 + s}$$

Η έξοδος $y(t)$ για είσοδο $x(t)$ είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της $Y(s)$. Με ανάλυση σε απλά κλάσματα έχουμε:

$$\frac{4}{s(s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{\Gamma}{(s+1)^2}$$

Απ' όπου:

$$4 = A(s+1)^2 + Bs(s+1) + \Gamma s$$

Οπότε: $A = 4, B = -4, \Gamma = -4$.

Άρα:

$$Y(s) = \frac{4}{s} - \frac{4}{s+1} - \frac{4}{(s+1)^2} \Rightarrow y(t) = 4L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 4L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - 4L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}$$

Τα $\frac{1}{s}, \frac{1}{s+1}$ είναι οι μετασχηματισμοί Laplace των σημάτων $u(t)$, $e^{-t}u(t)$ αντίστοιχα. Για τον υπολογισμό του $L^{-1}\{\frac{1}{(s+1)^2}\}$ έχουμε:

Αν $x(t) = te^{-at}u(t)$, ο μετασχηματισμός Laplace του $x(t)$ είναι ίσος με:

$$X(s) = \int_0^{\infty} te^{-at}u(t)e^{-ts}dt = \int_0^{\infty} te^{-at}e^{-ts}dt = \int_0^{\infty} te^{-(a+s)t}dt$$

Με παραγοντική ολοκλήρωση:

$$\int te^{-(\alpha+s)t}dt = -\frac{1}{s+a}\int t\left(e^{-(\alpha+s)t}\right)' \; dt = -\frac{te^{-(\alpha+s)t}}{s+a} + \frac{1}{s+a}\int te^{-(\alpha+s)t}dt =$$

$$= -\frac{te^{-(\alpha+s)t}}{s+a} + \frac{1}{(s+a)^2} + c$$

Οπότε: $X(s) = \frac{1}{(\alpha+s)^2}$

Γιατί

$$lim_{t\to\infty}\left(-\frac{te^{-(\alpha+s)t}}{s+a}\right) = 0$$

Άρα:

$$L\{te^{-\alpha t}u(t)\} = \frac{1}{(a+s)^2} \Rightarrow te^{-\alpha t}u(t) = L^{-1}\{\frac{1}{(a+s)^2}\}$$

Επομένως:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} = te^{-t}u(t)$$

Τελικά:

$$Y(s) = \frac{4}{s} - \frac{4}{s+1} - \frac{4}{(s+1)^2} \Rightarrow$$

$$y(t) = 4L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 4L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - 4L^{-1}\{\frac{1}{(s+1)^2}\} \Rightarrow$$

$$y(t) = 4u(t) - 4e^{-t}u(t) - 4te^{-t}u(t)$$

Παράδειγμα 4.4.5

Ένα συνεχούς-χρόνου L.T.I. σύστημα περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση:

$$y'(t) + 2y(t) = x'(t) + x(t)$$

Να βρεθεί η κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος.

Λύση

Παίρνοντας τον μετασχηματισμό Laplace των δύο μελών της παραπάνω σχέσης έχουμε και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (VII) (παραγώγιση στο πεδίο του χρόνου) του μετασχηματισμού Laplace:

$$sY(s) + 2Y(s) = sX(s) + 1X(s) \Rightarrow$$

$$(s + 2)Y(s) = (s + 1)X(s) \Rightarrow$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s + 1}{s + 2}$$

Επομένως, η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι ίση με:

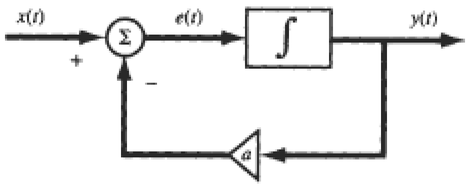
$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s + 1}{s + 2} = \frac{s + 2 - 1}{s + 2} = 1 - \frac{1}{s + 2}$$

Η κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος είναι ίση με:

$$h(t) = L^{-1}\left\{1 - \frac{1}{s + 2}\right\} = L^{-1}\{1\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{s + 2}\right\} = \delta(t) - e^{-2t}u(t)$$

Παράδειγμα 4.4.6

Έστω ότι έχουμε το συνεχούς-χρόνου L.T.I. που περιγράφεται από το σχήμα:



Να βρεθεί:

(α) η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το σύστημα

(β) η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ ενός συστήματος

(γ) η κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος.

Λύση

(α) Από το σχήμα είναι φανερό ότι:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e(\tau)d\tau \qquad (1)$$

και

$$e(t) = x(t) - ay(t) \qquad (2)$$

Αλλά από την σχέση (1) έχουμε:

$$y'(t) = e(t)$$

και χρησιμοποιώντας την (2), έχουμε ότι η ζητούμενη διαφορική εξίσωση είναι ίση με:

$$y'(t) = e(t) = x(t) - ay(t) \Rightarrow$$

$$y'(t) + ay(t) = x(t)$$

(β) Παίρνοντας τον μετασχηματισμό Laplace των δύο μελών της παραπάνω σχέσης έχουμε και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (VII) (παραγώγιση στο πεδίο του χρόνου) του μετασχηματισμού Laplace, έχουμε:

$$sY(s) + \alpha Y(s) = X(s) \Rightarrow$$

$$(s+\alpha)Y(s) = X(s) \Rightarrow$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s+\alpha}$$

Επομένως, η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι ίση με:

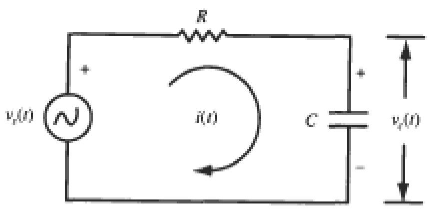
$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s+\alpha}$$

(γ) Η κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος είναι ίση με:

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s+\alpha}\right\} = e^{-\alpha t}u(t), \qquad Re(s) > -a$$

Παράδειγμα 4.4.7

Έστω ότι έχουμε το παρακάτω RC κύκλωμα.



Να βρεθεί: (α) η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος

(β) η κρουστική απόκριση

Σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

(I) το $x(t) = v_s(t)$ και $y(t) = v_c(t)$.

(II) το $x(t) = v_s(t)$ και $y(t) = i(t)$.

Λύση

(I) Είδαμε στο παράδειγμα 2.1.3(α) ότι, η διαφορική εξίσωση που περιγράφει τη σχέση μεταξύ εισερχόμενου και εξερχόμενου σήματος, είναι σ΄ αυτή την περίπτωση:

$$\frac{dy(t)}{dt}+\frac{1}{RC}y(t)=\frac{1}{RC}x(t)$$

Παίρνοντας τον μετασχηματισμό Laplace των δύο μερών της εξίσωσης, έχουμε για την συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος:

$$sY(s)+\frac{1}{RC}Y(s)=\frac{1}{RC}X(s)\Rightarrow\left(s+\frac{1}{RC}\right)Y(s)=\frac{1}{RC}X(s)\Rightarrow$$

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{\frac{1}{RC}}{\left(s+\frac{1}{RC}\right)}=\frac{1}{RC}\frac{1}{\left(s+\frac{1}{RC}\right)}$$

Η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι ίση με:

$$h(t)=L^{-1}(H(s))=L^{-1}\left(\frac{1}{RC}\frac{1}{\left(s+\frac{1}{RC}\right)}\right)=\frac{1}{RC}L^{-1}\left(\frac{1}{\left(s+\frac{1}{RC}\right)}\right)\Rightarrow$$

$$h(t)=\frac{1}{RC}e^{-t\frac{1}{RC}}u(t)$$

(II) Και πάλι, από το παράδειγμα 2.1.3(β) , η διαφορική εξίσωση που περιγράφει τη σχέση μεταξύ εισερχόμενου και εξερχόμενου σήματος, είναι σ΄αυτή την περίπτωση:

$$\frac{dy(t)}{dt}+\frac{1}{RC}y(t)=\frac{1}{R}\frac{dx(t)}{dt}$$

Παίρνοντας τον μετασχηματισμό Laplace των δύο μερών της εξίσωσης, έχουμε για την συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος:

$$sY(s)+\frac{1}{RC}Y(s)=\frac{1}{R}s\,X(s)\Rightarrow\left(s+\frac{1}{RC}\right)Y(s)=\frac{1}{R}sX(s)\Rightarrow$$

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{\frac{1}{R}s}{\left(s+\frac{1}{RC}\right)}=\frac{1}{R}\frac{s}{\left(s+\frac{1}{RC}\right)}=\frac{1}{R}\frac{s+\frac{1}{RC}-\frac{1}{RC}}{\left(s+\frac{1}{RC}\right)}$$

$$=\frac{1}{R}\frac{s+\frac{1}{RC}}{\left(s+\frac{1}{RC}\right)}-\frac{1}{R}\frac{\frac{1}{RC}}{\left(s+\frac{1}{RC}\right)}=\frac{1}{R}\frac{s+\frac{1}{RC}}{\left(s+\frac{1}{RC}\right)}-\frac{1}{R^2C}\frac{1}{\left(s+\frac{1}{RC}\right)}\Rightarrow$$

$$H(s) = \frac{1}{R} - \frac{1}{R^2C}\frac{1}{\left(s + \frac{1}{RC}\right)}$$

Η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι ίση με:

$$h(t) = L^{-1}\big(H(s)\big) = L^{-1}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R^2C}\frac{1}{\left(s + \frac{1}{RC}\right)}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{R^2C}L^{-1}\left(\frac{1}{\left(s + \frac{1}{RC}\right)}\right) \Rightarrow$$

$$h(t) = \frac{1}{R}\delta(t) - \frac{1}{R^2C}\, e^{-t\frac{1}{RC}}\, u(t)$$

4.5 Μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace

Ορισμός 4.5.1

Ο μονόπλευρος **μετασχηματισμός Laplace** του σήματος $x(t)$ ορίζεται από τη σχέση:

$$X_l(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt.$$

Παρατήρηση 4.5.2

(α) Το κατώτερο όριο ολοκλήρωσης είναι το 0^- (και όχι το 0^+) για να μπορούμε να συμπεριλάβουμε σήματα όπως το $\delta(t)$ και τις παραγώγους του.

(β) Ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace συμπίπτει με τον αμφίπλευρο μετασχηματισμό για σήματα $x(t)$ τ.ω. $x(t) = 0$ για $t < 0$.

(γ) Οι περισσσότερες ιδιότητες του μονόπλευρου μετασχηματισμού Laplace είναι οι ίδιες μ' αυτές του αμφίπλευρου μετασχηματισμού Laplace. Διαφορές υπάρχουν σε ιδιότητες όπως:

I) (**παραγώγιση στο πεδίο του χρόνου**)

$$x(t) \leftrightarrow X_l(s) \Leftrightarrow x'(t) \leftrightarrow sX_l(s) - x(0^-)$$

όταν $lim_{t\to\infty} x(t)e^{-st} = 0$

II) (**ολοκλήρωση στο πεδίο του χρόνου**)

$$x(t) \leftrightarrow X_l(s) \Leftrightarrow \int_{0^-}^{t} x(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s}X_l(s)$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s}X_l(s) + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)d\tau$$

(δ) Ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace είναι χρήσιμος για τον υπολογισμό της απόκρισης, σ΄ένα αιτιατό σύστημα, όταν η είσοδος είναι ένα αιτιατό σήμα και το σύστημα περιγράφεται από μια γραμμική σ.δ.ε. με σταθερούς συντελεστές και μη-μηδενικές αρχικές συνθήκες.

(ε) Ισχύουν οι ιδιότητες:

(I) $x(0^+) = lim_{s\to\infty} sX_l(s)$ (θεώρημα αρχικής τιμής)

(II) $lim_{t\to\infty} x(t) = lim_{s\to 0} sX_l(s)$ (θεώρημα τελικής τιμής)

Παράδειγμα 4.5.3

Ένα συνεχούς-χρόνου L.T.I. σύστημα περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση:

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = x(t)$$

με αρχικές συνθήκες $y(0) = 2, y'(0) = 1$. Να βρεθεί η έξοδος $y(t)$ του συστήματος, όταν η είσοδος είναι $x(t) = e^{-t}u(t)$.

Λύση

Χρησιμοποιώντας επαναληπτικά την ιδιότητα (I) (παραγώγιση στο πεδίο του χρόνου) του μονόπλευρου μετασχηματισμού Laplace έχουμε:

$$y'(t) \leftrightarrow sY_l(s) - y(0^-) = sY_l(s) - 2$$

$$y''(t) \leftrightarrow s^2Y_l(s) - sy(0^-) - y'(0) = s^2Y_l(s) - 2s - 1$$

Παίρνοντας τον μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace των δύο μελών της παραπάνω σχέσης και

$$s^2Y_l(s) - 2s - 1 + 5(sY_l(s) - 2) + 6Y_l(s) = \frac{1}{s+1} \Rightarrow$$

$$Y_l(s) = \frac{-2s-9}{(s+1)(s^2+5s+6)} = \frac{-2s-9}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Με ανάλυση σε απλά κλάσματα έχουμε:

$$Y_l(s) = \frac{-2s-9}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{\Gamma}{s+3} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{7}{2} \\ B = 5 \\ \Gamma = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Δηλαδή:

$$Y_l(s) = -\frac{7}{2}\frac{1}{s+1} + 5\frac{1}{s+2} + -\frac{3}{2}\frac{1}{s+3}$$

Παίρνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, έχουμε:

$$y(t) = -\frac{7}{2}e^{-t}u(t) + 5e^{-2t}u(t) + -\frac{3}{2}e^{-3t}u(t)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 ΤΥΧΑΙΑ ΣΗΜΑΤΑ

5.1 Τυχαία σήματα

Είδαμε στα προηγούμενα κεφάλαια ότι, ένα (ντετερμινιστικό) σήμα $X(t)$ είναι μια συνάρτηση του χρόνου, δηλαδή για σε κάθε χρονική στιγμή t η τιμή του σήματος είναι η (συγκεκριμένη) $X(t)$. Εάν τώρα, σε κάθε χρονική στιγμή η τιμή του σήματος είναι *τυχαία* (αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης), τότε το σήμα ονομάζεται **τυχαίο**.

Πολλές φορές, τα τυχαία σήματα εάν μελετηθούν για μεγάλο χρονικό διάστημα παρουσιάζουν κάποια «κανονικότητα», η οποία μπορεί να περιγραφεί με την βοήθεια πιθανο-θεωρητικών και στατιστικών μέσων. Κατάλληλα μαθηματικά μοντέλα για την περιγραφή τους είναι αυτά της θεωρίας των *στοχαστικών διαδικασιών*.

Ορισμός 5.1.1
Μια συνάρτηση

$$X: T \times \Omega \to R,$$

όπου Ω ο δειγματοχώρος ενός πειράματος τύχης και T ένα υποσύνολο του συνόλου των πραγματικών αριθμών R, ονομάζεται **τυχαίο σήμα** (ή στην Θεωρία Πιθανοτήτων **στοχαστική διαδικασία**).

Παρατήρηση 5.1.2

(α) Εάν τυχαίο σήμα συμβολίζεται με $X(t,\omega)$ ή συνήθως με $\{X(t)\}_{t\in T}$ (το ω δηλαδή εννοείται και παραλείπεται).

(β) (I) $\forall t$, η συνάρτηση $X(t,.) : \Omega \to R$ είναι μια τυχαία μεταβλητή (η τιμή του σήματος δηλαδή είναι τυχαία) της οποίας η κατανομή είναι συνήθως γνωστή.

(II) $\forall \omega$, η συνάρτηση $X(.,\omega) : A \to R$ ονομάζεται **τροχιά** του σήματος ή **πραγματοποίηση** του σήματος.

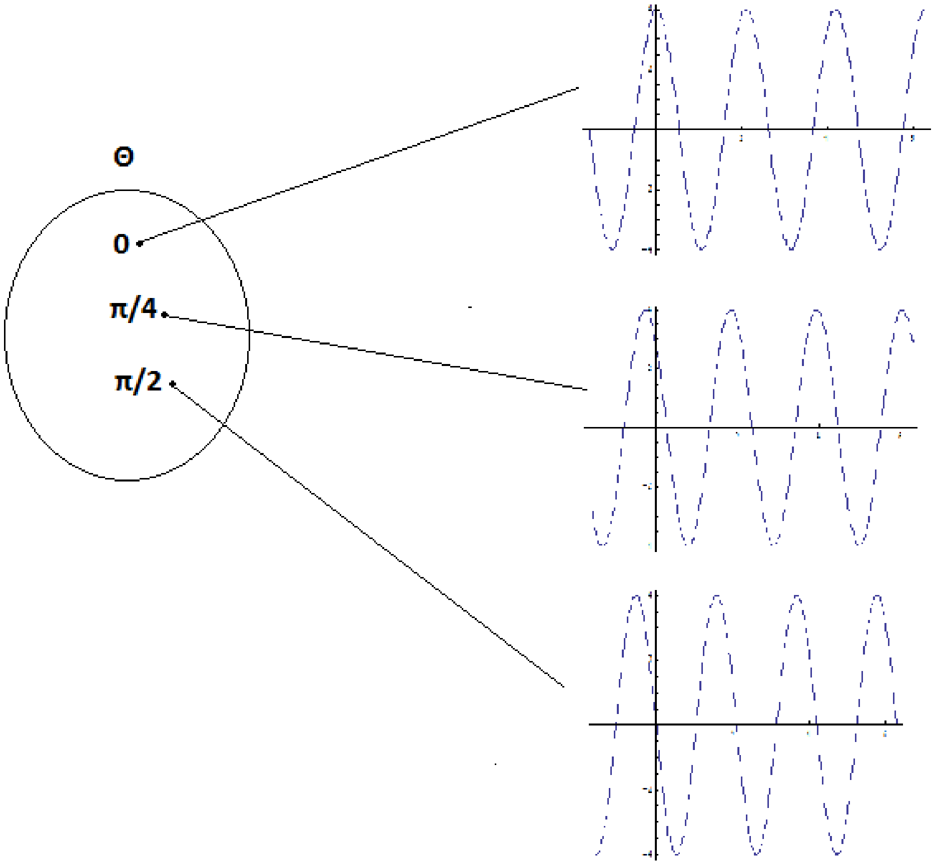
(γ) Το σύνολο T καλείται **παραμετρικός χώρος** του σήματος. Εάν κάθε μία από τις τ.μ. $X(t) = X(t,.)$ παίρνει τιμές σ' ένα σύνολο S, το S καλείται **χώρος καταστάσεων** του σήματος.

Παράδειγμα 5.1.3
Έστω ότι το (τυχαίο) σήμα $\{X(t)\}_{t\in T}$ δίνεται από την σχέση:

$$X(t) = 4\cos(3t + \Theta) \quad \text{(ή σωστότερα } X(t,\omega) = 4\cos(3t + \Theta(\omega))\text{)}$$

(δηλαδή ημιτονοειδές σήμα με σταθερό πλάτος και συχνότητα και μεταβλητή γωνία φάσης) όπου Θ μια τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[0,2\pi]$.

Μερικέ από τις τροχιές του σήματος φαίνονται στα παρακάτω σχήματα.



Τα τυχαία σήματα μπορεί να διαφέρουν:

(α) ως προς τον **χώρο καταστάσεων**

Εάν λοιπόν το S είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο, τότε το σήμα (ή η σ.δ) καλείται **διακριτού χώρου καταστάσεων**, ενώ εάν το S δεν είναι αριθμήσιμο καλείται **συνεχούς χώρου καταστάσεων**.

(β) ως προς τον **παραμετρικό χώρο**

Εάν το σύνολο T είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο, τότε το τυχαίο σήμα καλείται σήμα σε **διακριτό χρόνο**, ενώ εάν το T δεν είναι αριθμήσιμο καλείται σήμα σε **συνεχή χρόνο**.

(γ) ως προς τις **σχέσεις εξάρτησης** μεταξύ των τ.μ. $X(t)$ που το αποτελούν.

Δυό από τα είδη εξάρτησης μελετώνται παρακάτω

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να έχουμε μια πλήρη εικόνα του σήματος.

(α) Μπορεί να γνωρίζουμε την από κοινού κατανομή πεπερασμένων υποσυνόλων του σήματος $\{X(t)\}_{t\in T}$. Η κατανομή αυτή υπολογίζεται συνήθως με την βοήθεια της από **κοινού συνάρτηση κατανομής**:

$$F_{X(t_1),X(t_2),\dots,X(t_n)}(x_1,x_2,\dots,x_n) = P\{X(t_1)\le x_1, X(t_2)\le x_2,\dots,X(t_n)\le x_n\}$$

Εάν η κατανομή αυτή είναι γνωστή για n συγκεκριμένο και για κάθε $t_1,\dots\dots,t_n$, το σήμα καλείται **τυχαίο σήμα n-τάξεως**.

(β) Εάν είναι δύσκολο να υπολογιστεί η κατανομή του σήματος, τότε για τυχόν πληροφορίες αναφορικά με αυτό, χρησιμοποιούμε ποσότητες (συναρτήσεις) όπως:

(Ι) η **συνάρτηση μέσης τιμής** του σήματος:

$$\mu_X(t) = EX(t)$$

Αν οι τυχαίες μεταβλητές του σήματος είναι διακριτές, τότε:

$$E\{X(t)\} = \sum x P_{X(t)}(x)$$

ενώ αν είναι συνεχείς:

$$E\{X(t)\} = \int x f_{X(t)}(x)dx$$

(ΙΙ) η **συνάρτηση αυτοσυσχέτισης** του σήματος**:**

$$R_{XX}(t,s) = E(X(t)X(t+s))$$

Στην περίπτωση σημάτων με συνεχείς τυχαίες μεταβλητές είναι ίση με:

$$R_{XX}(t_1,t_2) = \iint xy f_{X(t_1),X(t_2)}(x,y)dxdy.$$

(ΙΙΙ) η **συνάρτηση αυτο-συνδιασποράς** του σήματος:

$$C_{XX}(t,s) = E(X(t)X(t+s)) - EX(t)EX(t+s)$$

Η συνάρτηση διασποράς είναι ίση με:

$$\sigma^2(X(t)) = C_{XX}(t,t)$$

Πρόταση 5.1.4
Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ενός σήματος ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

(α) $R_{XX}(t,t) = EX^2(t) \geq 0$

(β) $R_{XX}(t,s) = R_{XX}(s,t)$

(γ) $|R_{XX}(t,s)| \leq \frac{R_{XX}(t,t)+R_{XX}(s,s)}{2}$

Παράδειγμα 5.1.5
Εάν $X(t) = A\cos\omega_0 t$, $t \in \mathbb{R}$ όπου ω_0 σταθερά, και A τυχαία μεταβλητή τ.ω. $A \simeq U(0,1)$. Να βρεθεί (α) η συνάρτηση μέσης τιμής και (β) η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του σήματος.

Λύση

(I) Η $\mu_X(t) = EX(t) = EA\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}\cos\omega_0 t$

(II) Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης:

$$R_{XX}(t,s) = EX(t)X(s) = E(A\cos\omega_0 t \ \ \mathrm{A}\cos\omega_0 s\ ) =$$

$$= EA^2\cos\omega_0 t\ \cos\omega_0 s = \frac{1}{3}\cos\omega_0 t\ \cos\omega_0 s$$

Εάν τώρα έχουμε δύο τυχαία σήματα $\{X(t)\}_{t\in T}$ και $\{Y(t)\}_{t\in T}$, σημαντικό ρόλο στην μελέτη τους παίζει η λεγόμενη **συνάρτηση ετερο-συσχέτισης**:

$$R_{XY}(t,s) = E(X(t)Y(t+s))$$

ή η συνάρτηση **ετερο-συνδιασποράς**:

$$C_{XY}(t,s) = E\big(X(t)Y(s)\big) - EX(t)EY(s) = E\big(X(t)Y(s)\big) - \mu_X(t)\mu_Y(s)$$

Παράδειγμα 5.1.6
Εάν $X(t) = A\cos\omega t + B sin\omega t$ και $Y(t) = B\cos\omega t - A sin\omega t$, $t \in \mathbb{R}$, ω σταθερά, A,B ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $EA = EB = 0$ και $EA^2 = EB^2 = \sigma^2$. Να βρεθεί η συνάρτηση ετερο-συσχέτισης τους.

Λύση

$$R_{XY}(t,s) = EX(t)Y(s) = E((A\cos\omega t + B sin\omega t\ )(B\cos\omega s - A sin\omega s\ )) =$$

$$= EAB\cos\omega t\ \cos\omega s - E\ A^2\ cos\ \omega t\ sin\ \omega s +$$

$$EB^2 sin\omega t\ cos\omega s - EAB\ sin\omega t\ sin\omega s =$$

$$=\sigma^2(sin\omega t\ cos\omega s-\cos\omega t\ \sin\omega s)=\sigma^2\sin\omega(t-s)$$

Ορισμός 5.1.7
Τα σήματα $\{X(t)\}_{t\in T}$ και $\{Y(t)\}_{t\in T}$ ονομάζονται:

(α) **ασυσχέτιστα** εάν:

$$C_{XY}(t,s)=0$$

(β) **ορθογώνια** εάν:

$$R_{XY}(t,s)=0$$

5.2 Στάσιμα σήματα

Ορίζουμε τώρα μια κατηγορία τυχαίων σημάτων, για τα οποία η από κοινού συνάρτηση κατανομής τους δεν αλλάζει όταν το σήμα «μετατοπίζεται» στον χρόνο.

Ορισμός 5.2.1
Το τυχαίο σήμα (σ.δ.) $\{X(t)\}_{t\in T}$ καλείται **ισχυρά** ή **αυστηρά στάσιμο** ή απλά **στάσιμο** εάν η από κοινού συνάρτηση κατανομής των τυχαίων μεταβλητών:

$$X(t_1),X(t_2),\dots,X(t_n)$$

είναι ίση με την από κοινού συνάρτηση κατανομής των τυχαίων μεταβλητών

$$X(t_1+h),X(t_2+h),\dots,X(t_n+h)$$

για κάθε $h\geq 0$ και για κάθε επιλογή των $t_1,t_2,\dots t_n$, δηλαδή:

$$P[X(t_1)\leq x_1,X(t_2)\leq x_2,\dots,X(t_n)\leq x_n]=$$
$$P[X(t_1+h)\leq x_1,X(t_2+h)\leq x_2,\dots\dots,X(t_n+h)\leq x_n]$$

Παρατήρηση 5.2.2
(I) Εάν η παραπάνω ιδιότητα ισχύει μόνο για τα $k\leq n$, τότε λέμε ότι το τυχαίο σήμα είναι **ισχυρά στάσιμο n^ης^ τάξης**.

(II) Είναι φανερό από τον ορισμό ότι, εάν ένα σήμα είναι ισχυρά στάσιμο n^ης^ τάξης, τότε είναι και ισχυρά στάσιμο όλων των προηγούμενων τάξεων $1,2,\dots,n-1$.

(III) Για σήματα ισχυρά στάσιμα 1^ης^ τάξης ισχύει:

$$P[X(t)\leq x_1]=P[X(t+\tau)\leq x_1]$$ ή η

$$P[X(t)\leq x_1]$$

δεν εξαρτάται από το t . Δηλαδή, οι τυχαίες μεταβλητές που αποτελούν το σήμα είναι ταυτοτικά κατανεμημένες. Επομένως, η μέση τιμή ενός τυχαίου σήματος, που είναι στάσιμο πρώτης τάξης, είναι σταθερή.

(IV) Για σήματα ισχυρά στάσιμα 2^{ης} τάξης ισχύει:

$$P[X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2] = P[X(t_1+\tau) \le x_1, X(t_2+\tau) \le x_2], \forall t_1, t_2, \tau$$

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ενός τυχαίου σήματος, σ' αυτή την περίπτωση, ικανοποιεί την παρακάτω σχέση:

$$R_{XX}(t, t+\tau) = E\{X(t)X(t+\tau)\} = \iint x_1 x_2 f_{X(t)X(t+\tau)}(x_1, x_2) dx_1\, dx_2$$

$$= \iint x_1 x_2 f_{X(t+s)X(t+s+\tau)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$$= E\{X(t+s)X(t+s+\tau)\} = R_{XX}(t+s, t+s+\tau), \forall s$$

Δηλαδή τελικά:

$$R_{XX}(t, t+\tau) = R_X(t+s, t+s+\tau) = R_{XX}(0, \tau)$$

(V) Οι παράμετροι ενός ισχυρά στάσιμου σήματος (τουλάχιστον 2^{ης} τάξης), όπως η μέση τιμή, διασπορά της σ.δ., δεν αλλάζουν σε σχέση με τον χρόνο.

Παράδειγμα 5.2.3

Έστω X μια τ.μ. με γνωστή κατανομή (με μέση τιμή μ) και $X(t) = X, \quad \forall t$. Το σήμα $\{X(t)\}_{t\in T}$ είναι ισχυρά στάσιμο.

Ορισμός 5.2.4 (ασθενώς στάσιμο σήμα)

Το τυχαίο σήμα (σ.δ.) $\{X(t)\}_{t\in T}$ καλείται **ασθενώς στάσιμο** ή **στάσιμο υπό την ευρεία έννοια** εάν:

(α) η συνάρτηση μέσης τιμής $\mu_X(t) = EX(t) = \mu_X$ είναι ανεξάρτητη από το t.

(β) η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_{XX}(s,t)$ = f$(|s-t|)$ (όπου f γνωστή συνάρτηση). Δηλαδή η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης εξαρτάται από την διαφορά ανάμεσα ανάμεσα στα s και t (για την περιγραφή της χρησιμοποιούμε μιά και όχι δύο μεταβλητές).

Παρατήρηση 5.2.5

(I) Στην περίπτωση ενός ασθενώς στάσιμου τυχαίου σήματος γράφουμε ισοδύναμα:

$$R_{XX}(t, t+\tau) = R_{XX}(\tau), \qquad \forall \tau > 0$$

(II) Ένας ισοδύναμος ορισμός του ασθενώς στάσιμου τυχαίου σήματος είναι και ο εξής: το τυχαίο σήμα (σ.δ.) $\{X(t)\}_{t\in T}$ καλείται **ασθενώς στάσιμο** εάν και μόνο εάν $\forall\ \tau$ το σήμα $Y(t) = X(t+\tau)$, $t \in T$ έχει την ίδια συνάρτηση μέσης τιμής και αυτοσυσχέτισης με το $\{X(t)\}_{t\in T}$.

(III) Η **συνάρτηση αυτο-συνδιασποράς,** ενός ασθενώς στάσιμου τυχαίου σήματος, είναι φανερό ότι εξαρτάται μόνον από την χρονική διαφορά τ, οπότε γίνεται σ' αυτή την περίπτωση:

$$C_{XX}(\tau) = R_{XX}(\tau) - \mu_X^2$$

Εάν $\mu_X = 0$, τότε $C_{XX}(\tau) = R_{XX}(\tau)$

(IV) Ισχύει:

$$R_{XX}(0) = EX^2(t)$$

Πρόταση 5.2.6

Κάθε ισχυρά στάσιμο τυχαίο σήμα, για το οποίο υπάρχουν οι ροπές δεύτερης τάξης, είναι και ασθενώς στάσιμο.

Παράδειγμα 5.2.7

Εάν $\{X(t)\}_{t\in T}$ ένα τυχαίο σήμα με μηδενική συνάρτηση μέσης τιμής και με συνάρτηση αυτοσυσχέτισης:

$$R_{XX}(\tau) = 5e^{-3\tau}$$

Να υπολογιστεί η ροπής 2ης τάξης της τ.μ. $X(5) - X(3)$

Λύση

Έχουμε:

$$\begin{aligned} E\left[\left(X(5) - X(3)\right)^2\right] &= EX^2(5) - 2EX(5)X(3) + EX^2(3) \\ &= R_{XX}(0) - 2R_{XX}(2) + R_{XX}(0) \\ &= 5 - 5e^{-6} + 5 = 10 - 5e^{-6} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 5.2.8

Εάν το τυχαίο σήμα $\{X(t)\}_{t\in T}$ αποτελείται από ανεξάρτητες και ταυτοτικά κατανεμημένες τ.μ με μέση τιμή μ, τότε είναι προφανώς ένα ισχυρά στάσιμο τυχαίο σήμα.

Εάν η κοινή κατανομή των τυχαίων μεταβλητών έχει πεπερασμένη διασπορά σ^2, τότε το $\{X(t)\}_{t\in T}$ είναι και ένα ασθενώς στάσιμο σήμα.

Λύση

Έχουμε:

(I) $\mu_X(t) = \mu, \quad \forall t$ (λόγω της κοινής κατανομής)

(II) Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης

$$R_{XX}(t,s) = EX(t)X(s) - EX(t)EX(s)$$

Εάν $t \neq s$ οι $X(t), X(s)$ ανεξάρτητες, οπότε: $EX(t)X(s) - EX(t)EX(s) = 0$

Εάν $t = s$ $\quad EX^2(t) - E(X(t))^2 = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$.

Άρα,

$$R_{XX}(t,s) = \begin{cases} 0 & t \neq s \\ \sigma^2 & t = s \end{cases}$$

Από τα (I) και (II) είναι φανερό ότι, το σήμα είναι (και) ασθενώς στάσιμο.

Παράδειγμα 5.2.9

(Αναφερόμενοι στο παράδειγμα 5.2.3) Εάν η τ.μ. X έχει πεπερασμένη διασπορά σ^2, τότε το σήμα $\{X(t)\}_{t\in T}$ είναι (και) ασθενώς στάσιμο. Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι ίση με:

$$R_{XX}(\tau) = EX^2(t) = \sigma^2 + \mu^2$$

Παράδειγμα 5.2.10

Εάν $X(t) = A\cos(\omega t + \Theta)$ $, t \in \mathbb{R}$ όπου A, ω σταθερές και $\Theta \simeq U(-\pi, \pi)$. Να δειχθεί ότι το σήμα $X(t)$ είναι ασθενώς στάσιμο.

Λύση

(I) Η $\mu_X(t) = EX(t) = A\ E\cos(\omega t + \Theta) = A\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}\cos(\omega t + \Theta)\, d\Theta = 0$

(II) Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης

$$R_{XX}(t, t+\tau) = EX(t)X(t+\tau) =$$

$$= E\left(A\cos(\omega t + \Theta) A\cos(\omega t + \omega\tau + \Theta)\right) =$$

$$= \frac{A^2}{(2\pi)}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega t + \Theta)\cos(\omega t + \omega\tau + \Theta)\, d\Theta =$$

$$= \frac{A^2}{(2\pi)}\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \{\cos\omega\tau + \cos(2\omega t + 2\Theta + \omega\tau)\}\, d\Theta$$

$$= \frac{A^2}{2}\cos(\omega\tau)$$

που εξαρτάται μόνο από το τ.

Από τα (I) και (II) έπεται ότι το σήμα $X(t)$ είναι ασθενώς στάσιμο.

Γενικότερα τώρα, έχουμε το εξής παράδειγμα.

Παράδειγμα 5.2.11

Έστω X(t) τυχαίο σήμα ασθενώς στάσιμο. Το *διαμορφωμένο τυχαίο σήμα* ορίζεται ως: $Y(t) = X(t)\cos(\omega_0 t + \Theta)$, όπου Θ τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[-\pi, \pi]$. Η Θ και το σήμα X(t) είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες. Το σήμα Y(t) είναι ασθενώς στάσιμο.

Λύση

(I) Για την μέση τιμή έχουμε:

$$E\{Y(t)\} = E\{X(t)\cos(\omega_0\, t + \Theta)\}$$

$$= E\{X(t)\}E\{\cos(\omega_0 t + \Theta)\} \qquad \text{(λόγω ανεξαρτησίας)}$$

$$= E(X)E\{\cos\,(\omega_0\, t + \Theta)\} \qquad \text{(λόγω στασιμότητας)}$$

Αλλά

$$E\{\cos(\omega_0 t + \Theta)\} = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega_0 t + \theta) f_\Theta(\theta) d\theta$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega_0 t + \theta)\frac{1}{2\pi}d\theta = 0$$

Επομένως: $E\{Y(t)\}$=0.

(II) Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι ίση με:

$$R_{YY}(t, t+\tau) = E\{Y(t)Y(t+\tau)\} =$$

$$= E\{X(t)\cos(\omega_0\, t + \Theta)X(t+\tau)\cos(\omega_0(t+\tau) + \Theta)\}$$

$$= E\{X(t)X(t+\tau)\cos(\omega_0 t + \Theta)\cos(\,\omega_0(t+\tau) + \Theta)\}$$

$$= E\{X(t)X(t+\tau)\}E\{\cos(\omega_0 t + \Theta)\cos(\omega_0(t+\tau) + \Theta)\}$$

(λόγω ανεξαρτησίας)

Όμως:

$$E\{\cos(\omega_0\, t + \Theta)\cos(\omega_0(t+\tau) + \Theta)\}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega_0 t + \theta)\cos(\omega_0(t+\tau) + \theta)\frac{1}{2\pi}d\theta$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}[\cos(\omega_0(2t+\tau) + 2\theta) + \cos(\omega_0\tau)]\frac{1}{2\pi}d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega_0(2t+\tau) + 2\theta)d\theta + \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega_0\tau)d\theta$$

$$= 0 + \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\cos(\omega_0 \tau)2\pi = \frac{1}{2}\cos(\omega_0 \tau)$$

Δηλαδή:

$$R_{YY}(t, t+\tau) = R_{XX}(\tau)\frac{1}{2}\cos(\omega_0 \tau) = \frac{1}{2}R_{XX}(\tau)\cos(\omega_0 \tau)$$

Επομένως, το σήμα Y(t) είναι ασθενώς στάσιμο.

Παρατήρηση 5.2.12

Το σήμα του παραδείγματος 5.2.10 προκύπτει από το σήμα του παραδείγματος 5.2.11 για $X(t) = A$.

Παράδειγμα 5.2.13

Εάν $Z_1, Z_2 \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$, ανεξάρτητες τ.μ , $\lambda \in \mathbb{R}$ και ορίσουμε το τυχαίο σήμα:

$$X_t = Z_1 \cos \lambda t + Z_2 \sin \lambda t,, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(α) Υπολογίστε τη συνάρτηση μέσης τιμής και αυτοσυσχέτισης του $\{X(t)\}_{t\in T}$.

(β) Δείξτε ότι το $\{X(t)\}_{t\in T}$ είναι ένα ασθενώς στάσιμο σήμα.

Λύση

(α) Έχουμε:

(I) $\mu_X(t) = EX(t) = EZ_1 \cos \lambda t + EZ_2 \sin \lambda t = 0$

(II)

$$R_{XX}(t,s) = EX(t)X(s)$$

$$= E[(Z_1 \cos s\lambda + Z_2 \sin s\lambda)(Z_1 \cos \lambda t + Z_2 \sin \lambda t)] =$$

$$= EZ_1^2 \cos s\lambda \cos \lambda t + EZ_1 Z_2 \cos s\lambda \sin \lambda t +$$

$$+ EZ_1 Z_2 \cos \lambda t \sin s\lambda + EZ_2^2 \sin s\lambda \sin \lambda t =$$

$$= \sigma^2(\cos s\lambda \cos \lambda t + \sin s\lambda \sin \lambda t) = \sigma^2 \cos \lambda (t-s)$$

Δηλαδή εξαρτάται από την διαφορά $t - s$.

(β) Από το (α) είναι φανερό ότι, το τυχαίο σήμα ότι το $\{X(t)\}_{t\in T}$ είναι ένα ασθενώς στάσιμο με συνάρτηση αυτοσυσχέτισης:

$$R_{XX}(\tau) = \sigma^2 \cos \lambda \tau$$

Παράδειγμα 5.2.14
Εάν $X(t) = At + B$, όπου *A,B* ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $EA = EB = 0$ και $EA^2 = EB^2 = \sigma^2$. Να εξεταστεί εάν το σήμα $\{X(t)\}_{t\in T}$ είναι ασθενώς στάσιμο.

Λύση

(I) η μέση τιμή του $\{X(t)\}_{t\in T}$:

$$\mu_X(t) = EX(t) = E(At + B) = EAt + EB = 0$$

σταθερά ανεξάρτητη του t.

(II) Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισής του:

$$R_{XX}(t,s) = EX(t)X(s) = E((At + B)(As + B)) =$$

$$= EA^2ts + EABt + EABs + EB^2$$

$$=\sigma^2(ts + 1)$$

που δεν εξαρτάται από την διαφορά των t και s.

Επομένως, το σήμα$\{X(t)\}_{t\in T}$ δεν είναι ασθενώς στάσιμο.

Έστω τώρα $\{X(t)\}_{t\in T}$ και $\{Y(t)\}_{t\in T}$ δύο τυχαία σήματα.

Ορισμός 5.2.15
Τα σήματα $\{X(t)\}_{t\in T}$ και $\{Y(t)\}_{t\in T}$ καλούνται **από κοινού ασθενώς στάσιμα** σήματα, εάν:
(α) καθένα από τα $\{X(t)\}_{t\in T}$, $\{Y(t)\}_{t\in T}$ είναι ένα ασθενώς στάσιμο σήμα
(β) η συνάρτης ετερο-συσχέτισης

$$R_{XY}(t,s) = E(X(t)Y(s))$$

εξαρτάται μόνο από την χρονική διαφορά τ, δηλαδή:

$$R_{XY}(t, t + \tau) = E\big(X(t)Y(t + \tau)\big) = R_{XY}(\tau)$$

Παρατήρηση 5.2.16
(I) Η **συνάρτηση ετερο-συνδιασποράς,** δύο από κοινού ασθενώς στάσιμων τυχαίων σημάτων εξαρτάται μόνον από την χρονική διαφορά τ, οπότε γίνεται σ' αυτή την περίπτωση:

$$C_{XY}(\tau) = R_{XY}(\tau) - \mu_X^2\ \mu_Y^2$$

(II) Τα σήματα $\{X(t)\}_{t\in T}$ και $\{Y(t)\}_{t\in T}$ είναι **ασυσχέτιστα** εάν:

$$C_{XY}(\tau) = 0 \qquad \text{ή εάν} \qquad R_{XY}(\tau) = \mu_X^2\, \mu_Y^2$$

(III) Τα σήματα $\{X(t)\}_{t\in T}$ και $\{Y(t)\}_{t\in T}$ είναι **ορθογώνια** εάν:

$$R_{XY}(\tau) = 0$$

Παράδειγμα 5.2.17

Να δειχθεί ότι, τα σήματα $\{X(t)\}_{t\in T}$ και $\{Y(t)\}_{t\in T}$ του παραδείγματος 5.1.6 είναι από κοινού ασθενώς στάσιμα.

Λύση

(α) Το σήμα $\{X(t)\}_{t\in T}$ είναι ασθενώς στάσιμο, γιατί:

(I) η μέση του τιμή:

$$\mu_X(t) = EX(t) = E(A\cos\omega t + B sin\omega t\ ) = EA\cos\omega t + EB sin\omega t = 0$$

σταθερά ανεξάρτητη του t.

(II) Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισής του:

$$R_{XX}(t,s) = \ EX(t)X(s) = E((A\cos\omega t + B sin\omega t\ )(A\cos\omega s + B sin\omega s)) =$$

$$= EA^2 \cos\omega t\ \cos\omega s + \ EAB\, cos\ \omega t\ sin\ \omega s +$$

$$EAB\ sin\omega t\ cos\omega s + EB^2\ sin\omega t\ sin\omega s =$$

$$= \sigma^2(\cos\omega t\ \cos\omega s + \ sin\omega t\ sin\omega s) = \sigma^2 \cos\omega(t-s)$$

που εξαρτάται από την διαφορά των t και s.

(β) Ανάλογα αποδεικνύεται ότι και τι σήμα $\{Y(t)\}_{t\in T}$ είναι ασθενώς στάσιμο.

(γ) Είδαμε στο παράδειγμα 5.1.6 ότι η συνάρτηση ετερο-συσχέτισης των σημάτων $\{X(t)\}_{t\in T}$ και $\{Y(t)\}_{t\in T}$ είναι ίση με:

$$R_{XY}(t,s) = \sigma^2 \sin\omega(t-s)$$

Δηλαδή και αυτή εξαρτάται από την διαφορά των t και s

Από τα (α),(β),(γ) έπεται ότι τα σήματα είναι από κοινού ασθενώς στάσιμα.

5.3 Πυκνότητα φάσματος ισχύος

Δίνουμε τώρα τον ορισμό της λεγόμενης (συνάρτησης) **πυκνότητας φάσματος ισχύος** ενός τυχαίου σήματος. Με την βοήθειά της είναι δυνατόν να μελετήσουμε ασθενώς στάσιμα τυχαία σήματα στο πεδίο συχνοτήτων και να ορίσουμε το βασικό τυχαίο σήμα που ονομάζεται **λευκός θόρυβος.**

Σε ότι ακολουθεί υποθέτουμε ότι, όλα τα τυχαία σήματα είναι ασθενώς στάσιμα.

Ορισμός 5.3.1 (συνάρτηση αυτοσυσχέτισης**)**
Εάν $X(t)$ είναι ένα τυχαίο σήμα, η **συνάρτηση αυτοσυσχέτισής** του δίνεται από την σχέση:

$$R_{XX}(\tau) = E(X(t)X(t+\tau))$$

Πρόταση 5.3.2 (ιδιότητες της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης)
(α) $R_{XX}(\tau) = R_{XX}(-\tau)$

(β) $|R_{XX}(\tau)| \leq R_{XX}(0)$

(γ) $R_{XX}(0) = EX^2(t)$
Απόδειξη
(α) Εάν θέσουμε: $t+\tau = t' \Rightarrow t = t' - \tau$, τότε:

$$R_{XX}(\tau) = E\big(X(t)X(t+\tau)\big) = E\big(X(t'-\tau)X(t')\big) = E\big(X(t')X(t'-\tau)\big) = R_{XX}(-\tau)$$

(β) Έχουμε ότι:

$$0 \leq E\big(X(t) \pm X(t+\tau)\big)^2 = E\big(X(t)\big)^2 \pm 2EX(t)EX(t+\tau) + E\big(X(t+\tau)\big)^2$$

$$= R_{XX}(0) \pm 2R_{XX}(\tau) + R_{XX}(0) = 2(R_{XX}(0) \pm R_{XX}(\tau))$$

απ' όπου έπεται το ζητούμενο.

(γ) Έπεται άμεσα από τον ορισμό για τ = 0.

Παρατήρηση 5.3.3
Η πρόταση μας αναφέρει ότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι άρτια, επομένως το γράφημά της είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα των y, και παίρνει την μέγιστή της τιμή στο σημείο τ=0. Η ποσότητα $R_{XX}(0) = EX^2(t)$ καλείται **μέση ισχύς** του σήματος $X(t)$.

Έστω τώρα $X(t)$, $Y(t)$ δυό (ασθενώς στάσιμα) τυχαία σήματα. Η **συνάρτηση ετερο-συσχέτισής** τους δίνεται από την σχέση:

$$R_{XY}(\tau) = E(X(t)Y(t+\tau))$$

Πρόταση 5.3.4 (ιδιότητες της συνάρτησης ετερο-συσχέτισης)
(α) $R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau)$

(β) $|R_{XY}(\tau)| \leq \sqrt{R_{XX}(0)R_{YY}(0)}$

(γ) $|R_{XY}(\tau)| \leq \frac{R_{XX}(0)+R_{YY}(0)}{2}$

Απόδειξη

(α) Εάν θέσουμε: $t+\tau = t' \Rightarrow t = t' - \tau$, τότε:

$$R_{XY}(\tau) = E\big(X(t)Y(t+\tau)\big) = E\big(X(t'-\tau)Y(t')\big) = E\big(Y(t')X(t'-\tau)\big) = R_{YX}(-\tau)$$

(β) Έχουμε ότι:

$$R_{XY}(\tau) = E\big(X(t)Y(t+\tau)\big) \leq \sqrt{E\big(X(t)\big)^2 E\big(Y(t+\tau)\big)^2} = \sqrt{R_{XX}(0)R_{YY}(0)}$$

από την γνωστή ανισότητα Cauchy-Schwarz

Ορισμός 5.3.5 (πυκνότητα φάσματος ισχύος)

Έστω $X(t)$ ένα (ασθενώς στάσιμο) τυχαίο σήμα. Ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης $R_{XX}(\tau)$ του τυχαίου σήματος $X(t)$, καλείται **πυκνότητα φάσματος ισχύος** του σήματος και δίνεται από την σχέση:

$$S_{XX}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$$

Αλλά τότε:

$$R_{XX}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega$$

Οι παραπάνω σχέσεις ονομάζονται σχέσεις των **Wiener-Khinchin**.

Πρόταση 5.3.6 (ιδιότητες της πυκνότητας φάσματος ισχύος)
(α) Η $S_{XX}(\omega)$ είναι μια πραγματική συνάρτηση και $S_{XX}(\omega) \geq 0$.

(β) $S_{XX}(\omega) = S_{XX}(-\omega)$

(γ) $R_{XX}(0) = EX^2(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega)d\omega$

Απόδειξη

(α) Έχουμε:

$$S_{XX}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau)\ cos\omega\tau\ d\tau + i \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau)\ sin\omega\tau\ d\tau$$

Αλλά η συνάρτηση $R_{XX}(\tau)\ sin\omega\tau$ είναι περιττή και ολοκληρώνεται σε συμμετρικό διάστημα, οπότε:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau)\ sin\omega\tau\ d\tau = 0$$

Επομένως:

$$S_{XX}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau)\ cos\omega\tau\ d\tau = 2\int_{0}^{\infty} R_{XX}(\tau)\ cos\omega\tau\ d\tau$$

(β) $S_{XX}(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau)\cos(-\omega\tau)\ d\tau = 2\int_{0}^{\infty} R_{XX}(\tau)\ cos\omega\tau\ d\tau = S_{XX}(\omega)$

(γ) Προφανής από την δεύτερη των σχέσεων Wiener-Khinchin, για τ =0.

Παράδειγμα 5.3.7

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ενός ασθενώς στάσιμου τυχαίου σήματος $X(t)$ είναι $R_{XX}(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|}$ $, A, a > 0$. Να βρεθεί η πυκνότητα φάσματος ισχύος.

Λύση

Έχουμε:

$$S_{XX}(\omega) = F\{R_{XX}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{0} Ae^{\alpha\tau}\, e^{-i\omega\tau} d\tau + \int_{0}^{\infty} Ae^{-\alpha\tau} e^{-i\omega\tau}\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{0} Ae^{(\alpha - i\omega)\tau}\, d\tau + \int_{0}^{\infty} Ae^{-(\alpha + i\omega)\tau} d\tau$$

$$= \frac{A}{\alpha - i\omega} e^{(\alpha - i\omega)\tau}\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{A}{\alpha + i\omega} e^{-(\alpha + i\omega)\tau}\Big|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{A}{\alpha - i\omega} \cdot 1 - \frac{A}{\alpha + i\omega} \cdot (-1)$$

$$= \frac{A}{\alpha - i\omega} + \frac{A}{\alpha + i\omega} = \frac{2A\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

Παράδειγμα 5.3.8

Έστω Y(t) ένα τυχαίο σήμα και Y(t)=X(t)+X(t-T), με X(t) ένα ασθενώς στάσιμο τυχαίο σήμα με συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_{XX}(\tau)$ και πυκνότητα φάσματος ισχύος $S_{XX}(\omega)$.

(α) Να βρεθεί η συνάρτηση μέσης τιμής του Y(t).

(β) Να βρεθεί η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του Y(t) σαν συνάρτηση της $R_{XX}(\tau)$.
(γ) Να βρεθεί η πυκνότητα φάσματος ισχύος της Y(t) σαν συνάρτηση της $S_{XX}(\omega)$.
(δ) Να εξεταστεί το τυχαίο σήμα Y(t) ως προς τη στασιμότητα.

Λύση

(α) Έχουμε:

$$E\{Y(t)\} = E\{X(t) + X(t-T)\}$$

$$= E\{X(t)\} + E\{X(t-T)\} = E(X) + E(X) = 2E(X)$$

($E\{X(t)\} = E(X)$ λόγω της στασιμότητας του $X(t)$).

(β) Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης:

$$R_{YY}(t+\tau, t) = E\{Y(t+\tau)Y(t)\}=$$

$$= E\{[X(t+\tau) + X(t+\tau-T)][X(t) + X(t-T)]\}$$

$$= E\{X(t+\tau)X(t)\} + E\{X(t+\tau-T)X(t)\} + E\{X(t+\tau)X(t-T)\} +$$

$$+E\{X(t+\tau-T)X(t-T)$$

$$= R_{XX}(t+\tau, t) + R_{XX}(t+\tau-T, t) + R_{XX}(t+\tau, t-T)$$

$$+R_{XX}(t+\tau-T, t-T)$$

$$= R_{XX}(\tau) + R_{XX}(\tau-T) + R_{XX}(\tau+T) + R_{XX}(\tau)$$

$$= 2R_{XX}(\tau) + R_{XX}(\tau-T) + R_{XX}(\tau+T) = R_{YY}(\tau)$$

(γ) Για την πυκνότητα φάσματος ισχύος της Y(t) έχουμε:

$$S_{YY}(\omega) = F\{R_{YY}(\tau)\} = F\{2R_{XX}(\tau) + R_{XX}(\tau-T) + R_{XX}(\tau+T)\}$$

$$= 2F\{R_{XX}(\tau)\} + F\{R_{XX}(\tau-T)\} + F\{R_{XX}(\tau+T)\}$$

$$= 2S_{XX}(\omega) + S_{XX}(\omega)e^{i\omega T} + S_{XX}(\omega)e^{-i\omega T}$$

$$= 2S_{XX}(\omega) + S_{XX}(\omega)[e^{i\omega T} + e^{-i\omega T}]$$

$$= 2S_{XX}(\omega) + 2S_{XX}(\omega)\cos(\omega T)$$

$$= 2S_{XX}(\omega)[1 + \cos(\omega T)]$$

$$= 2S_{XX}(\omega)2[\cos(\omega T)]^2 \text{ , επειδή}$$

$$2(\cos\alpha)^2 = 1 + \cos(2\alpha)$$

$$= 4S_{XX}(\omega)[\cos(\omega T)^2]$$

(δ) Έχουμε:

(I) $E\{Y(t)\} = 2E(X) = c$ σταθερά και

(II) $R_{YY}(t+\tau,t) = 2R_{XX}(\tau) + R_{XX}(\tau - T) + R_{XX}(\tau + T) = R_{YY}(\tau)$

Οπότε, το τυχαίο σήμα $Y(t)$ είναι ασθενώς στάσιμο.

Παράδειγμα 5.3.9

Έστω $Y(t) = AX(t)\cos(\omega_0 t + \Theta)$ όπου X(t) ένα (ασθενώς στάσιμο) τυχαίο σήμα με συνάρτηση μέσης τιμής $EX(t) = 0$, συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_{XX}(\tau)$ και πυκνότητα φάσματος ισχύος $S_{XX}(\omega)$. Ακόμα, τα A,ω είναι σταθερές και Θ μια τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[0,2\pi]$. Η Θ και το σήμα X(t) είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες. Να βρεθεί, για το σήμα $\{Y(t)\}_{t\in T}$:

(α) η συνάρτηση μέσης τιμής

(β) η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης

(γ) η πυκνότητα φάσματος ισχύος

Λύση

(I) Για την μέση τιμή έχουμε:

$$E\{Y(t)\} = E\{A\,X(t)\cos(\omega_0 t + \Theta)\}$$

$$= A\,E\{X(t)\}E\{\cos(\omega_0 t + \Theta)\} \qquad \text{(λόγω ανεξαρτησίας)}$$

$$= A\,E(X)E\{\cos(\omega_0 t + \Theta)\} = 0$$

(II) Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι ίση με:

$$R_{YY}(t, t+\tau) = E\{Y(t)Y(t+\tau)\} =$$

$$= E\{AX(t)\cos(\omega_0 t + \Theta)AX(t+\tau)\cos(\omega_0(t+\tau) + \Theta)\}$$

$$= A^2 E\{X(t)X(t+\tau)\cos(\omega_0 t + \Theta)\cos(\omega_0(t+\tau) + \Theta)\}$$

$$= A^2 E\{X(t)X(t+\tau)\}E\{\cos(\omega_0 t + \Theta)\cos(\omega_0(t+\tau) + \Theta)\}$$

(λόγω ανεξαρτησίας)

Όμως:

$$E\{\cos(\omega_0 t + \Theta)\cos(\omega_0(t+\tau) + \Theta)\}$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos(\omega_0 t + \theta)\cos(\omega_0(t+\tau) + \theta)\frac{1}{2\pi}d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}[\cos(\omega_0(2t+\tau)+2\theta)+\cos(\omega_0\tau)]\frac{1}{2\pi}d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\omega_0(2t+\tau)+2\theta)d\theta + \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\omega_0\tau)d\theta$$

$$= 0 + \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\cos(\omega_0\,\tau)2\pi = \frac{1}{2}\cos(\omega_0\,\tau)$$

Επομένως:

$$R_{YY}(\tau) = A^2 R_{XX}(\tau)\frac{1}{2}\cos(\omega_0\,\tau) = \frac{A^2}{2}R_{XX}(\tau)\cos(\omega_0\tau)$$

(III) Είναι γνωστό ότι:

$$S_{YY}(\omega) = F(R_{YY}(\tau))$$

και

$$F(\cos(\omega_0\,\tau)) = \pi\,\delta(\omega-\omega_0) + \pi\,\delta(\omega+\omega_0)$$

Παίρνοντας τον μετασχηματισμό Fourier των δύο μελών της:

$$R_{YY}(\tau) = \frac{A^2}{2}R_{XX}(\tau)\cos(\omega_0\tau)$$

έχουμε:

$$F(R_{YY}(\tau)) = \frac{A^2}{2}F(R_{XX}(\tau)\cos(\omega_0\tau)) \Rightarrow$$

$$S_{YY}(\omega) = \frac{A^2}{2}\frac{1}{2\pi}S_{YY}(\omega) * F(\cos(\omega_0\,\tau)) =$$

$$= \frac{A^2}{2}\frac{1}{2\pi}S_{YY}(\omega) * (\pi\,\delta(\omega-\omega_0) + \pi\,\delta(\omega+\omega_0))$$

$$= \frac{A^2}{4}(S_{YY}(\omega-\omega_0) + S_{YY}(\omega+\omega_0))$$

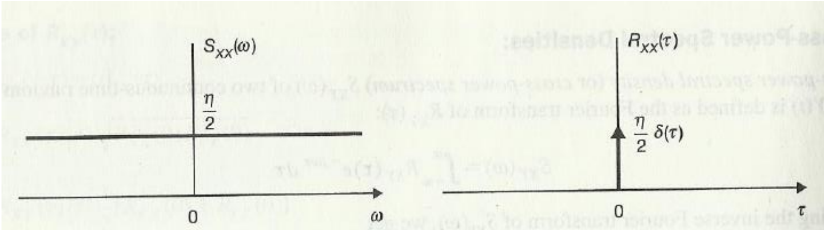
Ορισμός 5.3.10 (λευκός θόρυβος)

Ένα (ασθενώς στάσιμο) τυχαίο σήμα $X(t)$ καλείται **λευκός θόρυβος**, εάν η πυκνότητα φάσματος ισχύος του:

$$S_{XX}(\omega) = \frac{\eta}{2} \qquad \text{όπου } \eta \text{ σταθερά}$$

Αλλά τότε, η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του είναι ίση με:

$$R_{XX}(\tau) = \frac{\eta}{2}\delta(\tau)$$



Ορισμός 5.3.11

Έστω τώρα $X(t)$, $Y(t)$ δυό (ασθενώς στάσιμα) τυχαία σήματα. Ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης ετερο-συσχέτισης $R_{XY}(\tau)$ των τυχαίων σημάτων $X(t), Y(t)$ καλείται (ετερο) **πυκνότητα φάσματος ισχύος** των σημάτων και δίνεται από την σχέση:

$$S_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

Αλλά τότε:

$$R_{XY}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XY}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$$

Πρόταση 5.3.12 (ιδιότητες της πυκνότητας φάσματος ισχύος)

(α) Η $S_{XY}(\omega)$ είναι εν γένει, μια μιγαδική συνάρτηση.

(β) $S_{XY}(\omega) = S_{YX}(-\omega)$

(γ) $S_{XY}(-\omega) = \bar{S}_{YX}(\omega)$ όπου $\bar{S}$ ο συζυγής του S

Παράδειγμα 5.3.13

Έστω ότι έχουμε τα τυχαία σήματα $X(t) = A\cos(\omega t + \Theta)$ και $Y(t) = A\sin(\omega t + \Theta)$ όπου Α,ω σταθερές και Θ μια τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα [0,2π]. Να βρεθεί η συνάρτηση ετερο-συσχέτισης των σημάτων $X(t)$ και $Y(t)$.

Λύση

$$R_{XY}(t, t+\tau) = E\big(X(t)Y(t+\tau)\big) = E\big(A\cos(\omega t + \Theta) A\sin(\omega(t+\tau) + \Theta)\big)$$

$$= \frac{A^2}{2} E\big(\sin(2\omega t + \omega\tau + 2\Theta) - \sin(-\omega\tau)\big)$$

$$= \frac{A^2}{2}\big\{E\big(\sin(2\omega t + \omega\tau + 2\Theta)\big) - \sin(-\omega\tau)\big\} = \frac{A^2}{2}\sin(\omega\tau)$$

5.4 Απόκριση Γ.Χ.Α συστήματος σε τυχαία είσοδο

Είναι γνωστό ότι, εάν Τ είναι ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα και $x(t)$ η είσοδος στο σύστημα, τότε η έξοδος $y(t)$ δίνεται από την σχέση:

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

όπου $h(t)$ η κρουστική απόκριση του συστήματος.

Αν τώρα η είσοδος στο σύστημα είναι ένα τυχαίο σήμα $X(t), t \in T$ τότε και η έξοδος $Y(t) = T(X(t))$, $t \in T$ από το σύστημα είναι ένα τυχαίο σήμα και δίνεται από την σχέση:

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(a)\, X(t-a) da = h(t) * X(t)$$

(το ολοκλήρωμα αυτό είναι στοχαστικό).

Η μέση τιμή της εξόδου $Y(t)$ δίνεται από την σχέση:

$$\mu_{\mathrm{Y}}(t) = E(Y(t)) = E\int_{-\infty}^{+\infty} h(a)\, X(t-a) da = \int_{-\infty}^{+\infty} h(a)\, EX(t-a) da =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(a)\, \mu_X(t-a) da = h(t) * \mu_X(t)$$

και η συνάρτηση αυτοσυσχέτισής της:

$$R_{\mathrm{YY}}(t_1, t_2) = E(Y(t_1)Y(t_2)) = E\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(a)\, X(t_1 - a) h(\beta)\, X(t_2 - \beta) da d\beta =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(a)\, h(\beta) E(X(t_1 - a)\, X(t_2 - \beta)) da d\beta =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(a)\, h(\beta) R_{XX}(t_1 - a, t_2 - \beta) da d\beta$$

Παρατήρηση 5.4.1

Εάν το τυχαίο σήμα $X(t)$ είναι ασθενώς στάσιμο, τότε:

(I) Η μέση τιμή της εξόδου $Y(t)$ είναι ίση με:

$$\mu_{\mathrm{Y}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(a)\, \mu_X da = \mu_X \int_{-\infty}^{+\infty} h(a)\, da = \mu_X H(0)$$

όπου $H(\omega)$ η απόκριση συχνότητας του συστήματος.

(ΙΙ) Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της εξόδου $Y(t)$:

$$R_{YY}(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(a)h(\beta)R_{XX}(t_2-t_1+a-\beta)dad\beta$$

δηλαδή εξαρτάται από την διαφορά $\tau=t_2-t_1$, οπότε μπορούμε να γράψουμε ισοδύναμα:

$$R_{YY}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(a)h(\beta)R_{XX}(\tau+a-\beta)dad\beta$$

(ΙΙΙ) Από τα (Ι) και (ΙΙ) είναι φανερό ότι, εάν η είσοδος $X(t)$ είναι ένα τυχαίο ασθενώς στάσιμο σήμα, τότε και η έξοδος $Y(t)$ είναι και αυτή ένα τυχαίο ασθενώς στάσιμο σήμα.

Παράδειγμα 5.4.2

Έστω $X(t)$ ένα ασθενώς στάσιμο σήμα, είσοδος σ΄ ένα Γ.Χ.Α σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t)=5e^{-4t}u(t)$. Να βρεθεί η μέση τιμή της εξόδου $Y(t)$, εάν είναι γνωστό ότι: ΕΧ(t)=3.

Λύση

Η απόκριση συχνότητας είναι ίση με:

$$H(\omega)=F(h(t))=5\frac{1}{4+i\omega}$$

Η μέση τιμή της εξόδου $Y(t)$ είναι ίση με:

$$\mu_Y(t)=\mu_X H(0)=3\cdot 5\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$$

Η συνάρτηση ετερο-συσχέτισης ανάμεσα στην είσοδο $X(t)$ και την έξοδο $Y(t)$ δίνεται από την σχέση:

$$R_{XY}(t_1,t_2)=E(X(t_1)Y(t_2))=E\left[X(t_1)\int_{-\infty}^{+\infty} h(a)X(t_2-a)da\right]=E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(a)X(t_1)X(t_2-a)da\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} h(a)E(X(t_1)X(t_2-a))da=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} h(a)R_{XX}(t_1,t_2-a)da$$

Παρατήρηση 5.4.3
Εάν το $X(t)$ είναι ασθενώς στάσιμο, τότε η συνάρτηση ετερο-συσχέτισης ανάμεσα στην είσοδο $X(t)$ και την έξοδο $Y(t)$ δίνεται από την σχέση:

$$R_{XY}(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(a)R_{XX}(t_2-t_1-a)da$$

δηλαδή εξαρτάται από την διαφορά $\tau=t_2-t_1$, οπότε μπορούμε να γράψουμε ισοδύναμα:

$$R_{XY}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(a)R_{XX}(\tau-a)da=h(\tau)*R_{XX}(\tau) \qquad (1)$$

Δηλαδή, εάν η είσοδος $X(t)$ είναι ένα τυχαίο ασθενώς στάσιμο σήμα, τότε η είσοδος $X(t)$ και η έξοδος $Y(t)$ είναι από κοινού ασθενώς στάσιμα σήματα (αφού όπως είδαμε παραπάνω και η έξοδος $Y(t)$ είναι ένα ασθενώς στάσιμο σήμα).

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της εξόδου $Y(t)$:

$$\begin{aligned}R_{YY}(t_1,t_2)&=E(Y(t_1)Y(t_2))=E\left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(a)\,X(t_1-a)da\right)Y(t_2)\right]\\&=\int_{-\infty}^{+\infty} h(a)\mathrm{E}(X(t_1-a)Y(t_2))da=\\&=\int_{-\infty}^{+\infty} h(a)R_{XY}(t_1-a,t_2)da\end{aligned}$$

Παρατήρηση 5.4.4
Εάν η είσοδος $X(t)$ είναι ένα τυχαίο ασθενώς στάσιμο σήμα, τότε οι $X(t),Y(t)$ είναι από κοινού ασθενώς στάσιμα σήματα και έτσι (όπως είδαμε) η συνάρτηση ετεροσυσχέτισης εξαρτάται από την διαφορά $\tau=t_2-t_1$. Επομένως:

$$R_{YY}(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(a)R_{XY}(t_2-t_1+a)da$$

Στην περίπτωση αυτή, η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της εξόδου $Y(t)$ γίνεται:

$$\begin{aligned}R_{YY}(t,t+\tau)&=\int_{-\infty}^{+\infty} h(a)R_{XY}(t+\tau-t+\alpha)da=\int_{-\infty}^{+\infty} h(a)R_{XY}(\tau+\alpha)da=\\&=\int_{-\infty}^{+\infty} h(a)R_{XY}(-(\tau+\alpha))da=\int_{-\infty}^{+\infty} h(a)R_{XY}(-\tau-\alpha))da=\\&=h(-\tau)*R_{XY}(-\tau)=h(-\tau)*R_{XY}(\tau)\end{aligned}$$

δηλαδή:

$$R_{YY}(t,t+\tau)=h(-\tau)*R_{XY}(\tau) \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) , έχουμε:

$$R_{YY}(t,t+\tau)=h(-\tau)*R_{XY}(\tau)=h(-\tau)*h(\tau)*R_{XY}(\tau) \qquad (3)$$

Πρόταση 5.4.5
Ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

(α) $S_{XY}(\omega)=H(\omega)S_{XX}(\omega)$

(β) $S_{YY}(\omega)=\overline{H}(\omega)S_{XY}(\omega)$

(γ) $S_{YY}(\omega)=\left|H(\omega)\right|^2 S_{XX}(\omega)$

όπου $\overline{H}(\omega)$ ο συζυγής του $H(\omega)$.

Απόδειξη
(α) Αποδείξαμε ότι:

$$R_{XY}(\tau)=h(\tau)*R_{XX}(\tau)$$

Παίρνοντας τον μετασχηματισμό Fourier των μελών της σχέσης, και χρησιμοποιώντας γνωστή ιδιότητα του για την συνέλιξη, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}S_{XY}(\omega)&=F(R_{XY}(\tau))=F(h(\tau)*R_{XX}(\tau))=F(h(\tau))\ F(R_{XX}(\tau))=\\&=H(\omega)S_{XX}(\omega)\end{aligned}$$

(β) Δείξαμε ότι:

$$R_{YY}(\tau)=h(-\tau)*R_{XY}(\tau)$$

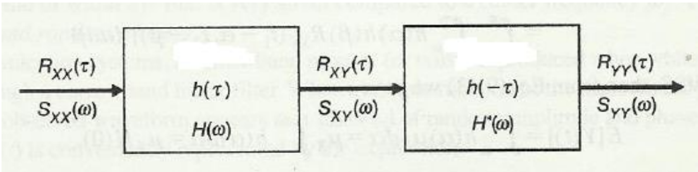
Παίρνοντας τον μετασχηματισμό Fourier των μελών της σχέσης, και χρησιμοποιώντας το ότι $F(h(-\tau))=\overline{H}(\omega)$, έχουμε (ανάλογα με το (α)) ότι:

$$S_{YY}(\omega)=\overline{H}(\omega)S_{XY}(\omega)$$

(γ) Από τα (α) και (β) έχουμε:

$$S_{YY}(\omega)=\overline{H}(\omega)S_{XY}(\omega)=\overline{H}(\omega)H(\omega)S_{XX}(\omega)=\left|H(\omega)\right|^2 S_{XX}(\omega)$$

Σχηματικά έχουμε:



Παρατήρηση 5.4.6

(I) Η σχέση (γ) αναφέρει ότι: η πυκνότητα φάσματος ισχύος της εξόδου $Y(t)$ σ' ένα Γ.Χ.Α. σύστημα είναι ίση με το γινόμενο της πυκνότητα φάσματος ισχύος της εισόδου $X(t)$ επί το τετράγωνο του μέτρου της απόκρισης συχνότητας του συστήματος.

(II) Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της εξόδου $Y(t)$ γίνεται σ' αυτή την περίπτωση:

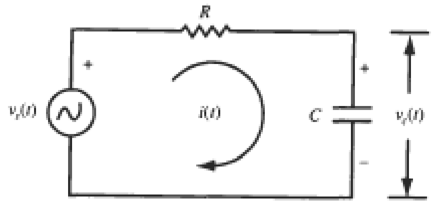
$$R_{\mathrm{YY}}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_{\mathrm{YY}}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|H(\omega)\right|^2 S_{\mathrm{XX}}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega$$

Η **μέση ισχύς** της εξόδου $Y(t)$ είναι ίση με:

$$\mathrm{E}\left(Y(t)\right)^2=R_{\mathrm{YY}}(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|H(\omega)\right|^2 S_{\mathrm{XX}}(\omega)d\omega$$

Παράδειγμα 5.4.7

Έστω ότι έχουμε το παρακάτω RC κύκλωμα.



και έστω ότι η είσοδος στο σύστημα είναι ένα τυχαίο σήμα λευκού θορύβου. Να βρεθεί: (α) η πυκνότητα φάσματος ισχύος της εξόδου $Y(t)$

(β) συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της $Y(t)$

(γ) η μέση ισχύς της εξόδου $Y(t)$

Λύση

(α) Είναι εύκολο να δει κανείς (με τρόπο ανάλογο του παραδείγματος στον μετασχηματισμό Laplace) ότι, η απόκριση συχνότητας στο κύκλωμα αυτό είναι ίση με:

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega RC}$$

Ακόμα, επειδή η είσοδος είναι λευκός θόρυβος: $S_{XX}(\omega) = \frac{\eta}{2}$.

Επομένως η πυκνότητα φάσματος ισχύος της εξόδου $Y(t)$:

$$S_{YY}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{XX}(\omega) = \frac{1}{1 + (\omega RC)^2} \frac{\eta}{2}$$

(β) Η

$$S_{YY}(\omega) = \frac{1}{1 + (\omega RC)^2} \frac{\eta}{2} = \frac{\eta}{2} \frac{1}{2RC} \frac{2RC}{1 + (\omega RC)^2} = \frac{\eta}{2} \frac{1}{2RC} \frac{2\frac{1}{RC}}{\omega^2 + \left(\frac{1}{RC}\right)^2}$$

οπότε παίρνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier των μελών της σχέσης αυτής έχουμε:

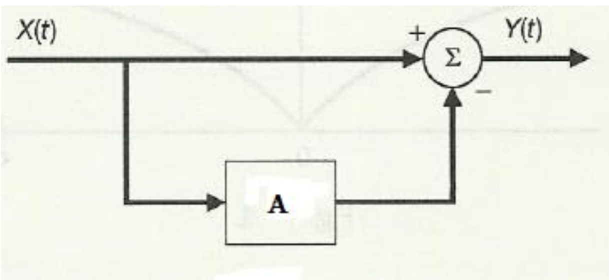
$$R_{YY}(\tau) = \frac{\eta}{2} \frac{1}{2RC} e^{-\frac{|\tau|}{RC}}$$

(γ) Η μέση ισχύς της εξόδου $Y(t)$ είναι ίση με:

$$\mathrm{E}\left(Y(t)\right)^2 = R_{YY}(0) = \frac{\eta}{2} \frac{1}{2RC} e^{-\frac{|0|}{RC}} = \frac{\eta}{4RC}$$

Παράδειγμα 5.4.8

Έστω $X(t)$ ένα ασθενώς στάσιμο σήμα, με πυκνότητα φάσματος ισχύος $S_{XX}(\omega)$, το οποίο είναι είσοδος στο σύστημα του παρακάτω σχήματος.



Να βρεθεί η πυκνότητα φάσματος ισχύος της εξόδου $Y(t)$.

Λύση

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η σχέση μεταξύ εισόδου και εξόδου του συστήματος είναι η:

$$Y(t) = X(t) - X(t-A)$$

οπότε η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι ίση με:

$$h(t) = \delta(t) - \delta(t-A)$$

και η απόκριση συχνότητας:

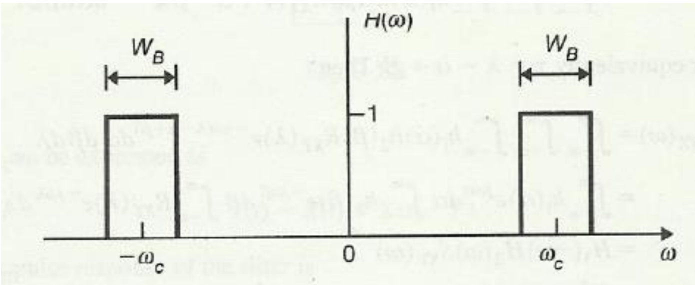
$$H(\omega) = F(h(t)) = F(\delta(t) - \delta(t-A)) = 1 - e^{-iA\omega}$$

Η πυκνότητα φάσματος ισχύος της εξόδου $Y(t)$:

$$S_{YY}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{XX}(\omega) = \left|1 - e^{-iA\omega}\right|^2 S_{XX}(\omega) =$$
$$= \left[(1 - \cos A\omega)^2 + (\sin A\omega)^2\right] S_{XX}(\omega) = 2(1 - \cos A\omega) S_{XX}(\omega)$$

Παράδειγμα 5.4.9

Η είσοδος $X(t)$ σ΄ ένα Γ.Χ.Α σύστημα είναι λευκός θόρυβος, η δε απόκριση συχνότητας φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Να υπολογιστεί η συνολική ισχύς της εξόδου $Y(t)$.

Λύση

Επειδή η είσοδος είναι λευκός θόρυβος: $S_{XX}(\omega) = \dfrac{\eta}{2}$. Ακόμα:

$$S_{YY}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{XX}(\omega) = |H(\omega)|^2 \frac{\eta}{2}$$

Η συνολική ισχύς της εξόδου $Y(t)$ είναι ίση με:

$$\mathrm{E}(Y(t))^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 S_{XX}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi}\frac{\eta}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\frac{\eta}{2} 2W_B = \frac{\eta W_B}{2\pi}$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Δ. Βούκαλης, «*Ανάλυση στοχαστικών σημάτων*», Εκδόσεις ΙΩΝ, 1993

2. Γ. Γκαρούτσος, «*Σήματα και συστήματα σε συνεχή χρόνο*», Εκδόσεις SPIN.

3. Τ. Δάρας-Π.Σύψας, «*Στοχαστικές Ανελίξεις. Θεωρία και Εφαρμογές*», 2003, Εκδόσεις Ζήτη

4. Τ. Δάρας-Π.Σύψας, «*Πιθανότητες και Στατιστική. Θεωρία και Εφαρμογές*», 2010, Εκδόσεις Ζήτη

5. Α.Ποταμιάνος, Β.Διγαλάκης, «*Εισαγωγή στις Πιθανότητες και τα τυχαία σήματα για Ηλεκτρολόγους Μηχανικούς*», σημειώσεις Τμήματος ΗΜΜΥ Πολυτεχνείο Κρήτης, 2010.

6. Hewi Hsw, “*Signals any systems*”, Schaum’s outlines, N.Y. 2011.

7. Hewi Hsw, “*Probability, random variables and random processes*”, Schaum’s outlines, N.Y. 1997.

8. Papoulis Athanasios, “*Probability, random variables and Stochastic processes*”, McGraw- Hill, 1984.